

week9: Kapitel 6: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, Teil2

Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell war gegeben durch die Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (1)$$

mit $t_k = k\Delta t$ und reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Wir hatten gesehen, dass für kleine Δt die stochastische Rekursion (1) durch den folgenden Ausdruck gelöst wird, der auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet wird:

$$S_{t_k} = S_{t_0} \exp \left\{ \sigma x_{t_k} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_k \right\} \quad (2)$$

wobei das x_{t_k} , eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit, die folgende Kombination von standard-normalverteilten Zufallszahlen ist,

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

Wir wollen uns zunächst an das folgende Theorem erinnern, was besagt, dass die Summe von normalverteilten Zufallszahlen wieder normalverteilt ist, und was typischerweise in einer Stochastik-Vorlesung bewiesen wird. In der Stochastik II Vorlesung aus dem SS2023 wurde das etwa in dem Theorem 2.2.1 in dem week3a.pdf gemacht, <http://hsrm-mathematik.de/SS2023/semester4/Stochastik2/week3a.pdf>:

Theorem (Summe von normalverteilten Zufallszahlen): Es seien $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ und Standardabweichungen $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Dann gilt: Die Summe

$$\phi := \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

und Varianz

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1 + \dots + \phi_n) \prod_{k=1}^n e^{-\frac{(\phi_k - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} = \int_{\mathbb{R}} f(\phi) e^{-\frac{(\phi - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \quad (3)$$

Als unmittelbare Konsequenz daraus können wir zunächst mal das folgende Theorem festhalten:

Theorem 6.3: Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ eine Folge von unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen und

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

sei eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit mit $t_k = k\Delta t$. Dann gilt für beliebige Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(x_{t_k})] = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \quad (4)$$

Beweis: Wir wenden das Theorem 2.2.1 aus der Stochastik II an mit $n = k$ und

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

und Varianz

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_k^2 \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 = k \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(x_{t_k})] &= \int_{\mathbb{R}^k} f\left(\sqrt{\Delta t} (\phi_1 + \dots + \phi_k)\right) \prod_{j=1}^k e^{-\frac{\phi_j^2}{2}} \frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}} \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{\Delta t} \phi\right) e^{-\frac{(\phi-0)^2}{2k}} \frac{d\phi}{\sqrt{2\pi k}} \\ &\stackrel{x:=\sqrt{\Delta t} \phi}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2k\Delta t}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi k\Delta t}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{x^2}{2t_k}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Wir wollen jetzt das zeitdiskrete Black-Scholes Modell (1) durch ein Binomial-Modell approximieren. Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hat die Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k$$

mit $\mathbb{E}[\phi_k] = 0$ und $\mathbb{V}[\phi_k] = 1$. Diese Returns wollen wir ersetzen durch Returns, die nur zwei Einstellungsmöglichkeiten ret_{up} und ret_{down} zulassen. Die folgende Wahl bietet sich an:

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &:= \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \\ \text{ret}_{\text{down}} &:= \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k \quad (5)$$

mit den Zufallszahlen

$$\varepsilon_k := \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases} \quad (6)$$

Wir haben dann ebenfalls

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k] = +1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\varepsilon_k] &= \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] - (\mathbb{E}[\varepsilon_k])^2 = \mathbb{E}[\varepsilon_k^2] \\ &= (+1)^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten also das N -Perioden Binomialmodell mit Preisdynamik

$$S_{t_k} = S_{t_{k-1}} (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k) \quad (7)$$

Wenn sich ℓ up>Returns realisiert haben, ist der Preis S_{t_N} gegeben durch

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell}$$

Erwartungswerte in diesem Binomialmodell sind dann gegeben durch, das hatten wir uns schon in dem week7 klar gemacht,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \times \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} =: \mathbb{E}^{\text{Bin}}[f(S_{t_N})] \end{aligned} \quad (8)$$

während Erwartungswerte im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &\stackrel{\Delta t \rightarrow 0}{=} \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x_{t_N} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right)\right] \\ &\stackrel{\text{Thm 6.3}}{=} \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_N\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2t_N}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi t_N}} \\ &=: \mathbb{E}^{\text{BS}}[f(S_{t_N})] \end{aligned} \quad (9)$$

Es gilt nun das folgende

Theorem 6.4: Es sei $T = t_N = N\Delta t$ ein fester Zeithorizont. Wir betrachten den Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ mit $T = N\Delta t$ fest. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\mathbf{E}^{\text{BS}}[\cdot]$ der Erwartungswert im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben durch (9) und $\mathbf{E}^{\text{Bin}}[\cdot]$ sei der Erwartungswert im approximierenden Binomialmodell gegeben durch (8). Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{E}^{\text{Bin}}[f(S_T)] = \mathbf{E}^{\text{BS}}[f(S_T)] \quad (10)$$

oder explizit

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{\ell=0}^N f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} = \int_{\mathbb{R}} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2T}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \quad (11)$$

mit

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t})^\ell (1 + \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t})^{N-\ell} \quad (12)$$

Beweis: Das approximierende Binomialmodell ist gegeben durch die Returns

$$\text{ret}_{t_k} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k$$

Wir machen zunächst einmal dieselben Umformungen wie auf den letzten beiden Seiten vom week8.pdf:

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0} \prod_{k=1}^N (1 + \text{ret}_{t_k}) \\ &= S_{t_0} \prod_{k=1}^N (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k) \\ &= S_{t_0} \exp\left\{\log\left[\prod_{k=1}^N (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k)\right]\right\} \\ &= S_{t_0} \exp\left\{\sum_{k=1}^N \log[1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k]\right\} \end{aligned} \quad (13)$$

Wir machen wieder eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + O(x^3)$$

bekommen wir

$$\log[1+x] = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Wir ignorieren wieder Terme der Grössenordnung $O(\Delta t^{3/2})$,

$$\begin{aligned} \log[1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k] &\approx \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k - \frac{(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k)^2}{2} \\ &\approx \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k - \frac{\sigma^2}{2} \Delta t \varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir jetzt $\varepsilon_k = \pm 1$ so dass $\varepsilon_k^2 = 1$. Also,

$$\log[1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k] \approx \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k + (\mu - \sigma^2/2) \Delta t \quad (14)$$

Die Approximation (14) setzen wir in (13) ein und bekommen die Darstellung

$$S_{t_N} \approx S_{t_0} \exp\left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k + (\mu - \sigma^2/2) N \Delta t \right\} \quad (15)$$

Soweit die Analogie zum week8.pdf. Jetzt berechnen wir den Erwartungswert im Binomialmodell. Wenn wir ℓ up>Returns haben mit $\varepsilon_k = +1$ sind $N - \ell$ Returns down>Returns mit $\varepsilon_k = -1$. Also ist dann

$$\sum_{k=1}^N \varepsilon_k = +1 \times \ell + (-1) \times (N - \ell) = 2\ell - N \quad (16)$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_{t_N})] &= \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &\stackrel{(15)}{\approx} \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k + (\mu - \sigma^2/2) N \Delta t \right\}\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N \mathbb{E}\left[f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^N \varepsilon_k + (\mu - \sigma^2/2) T \right\}\right) \times \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} (2\ell - N) + (\mu - \sigma^2/2) T \right\}\right) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \\ &= \sum_{\ell=0}^N f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{\Delta t} (2\ell - N) + (\mu - \sigma^2/2) T \right\}\right) \times \binom{N}{\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^\ell \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{T/N} (2\ell - N) + (\mu - \sigma^2/2) T \right\}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} \end{aligned} \quad (17)$$

Jetzt benutzen wir das Resultat aus der ersten Aufgabe vom Übungsblatt 9, das ist die folgende Formel: Für ein beliebiges $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^N F\left(\frac{2\ell - N}{\sqrt{N}}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (18)$$

In unserem Fall ist das F offensichtlich gegeben durch

$$F(x) := f\left(S_0 \exp\left\{ \sigma \sqrt{T} x + (\mu - \sigma^2/2) T \right\}\right) \quad (19)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E}^{\text{Bin}}[f(S_{t_N})] \\
& \stackrel{(17)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^N f\left(S_0 \exp\left\{\sigma \sqrt{T/N}(2\ell - N) + (\mu - \sigma^2/2)T\right\}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} \\
& \stackrel{(19)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^N F\left(\frac{2\ell - N}{\sqrt{N}}\right) \times \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} \\
& \stackrel{(18)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
& \stackrel{(19)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(S_0 \exp\left\{\sigma \sqrt{T} x + (\mu - \sigma^2/2)T\right\}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
& = \mathbb{E}^{\text{BS}}[f(S_T)]
\end{aligned}$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Als nächstes schauen wir uns dann an, wie wir diese Resultate benutzen können, um den Preis einer Option im Black-Scholes Modell zu berechnen.