

week7: Kapitel 5: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, Teil2

Wir betrachten jetzt eine pfadunabhängige Option mit Auszahlungsfunktion

$$H = H(S_N)$$

und werden dann sehen, dass wir die allgemeine Pricing-Formel vom letzten Mal in einen deutlich expliziteren Ausdruck umschreiben können, nämlich in

$$V_0 = (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{rn}^\ell (1-p_{rn})^{N-\ell}$$

wobei die $S_{N,\ell}$'s gegeben sind durch

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell}$$

Schauen wir uns das jetzt genauer an: Nach Voraussetzung ist der Preisprozess gegeben durch ein N -Perioden Binomialmodell,

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{with some probability } p \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{with probability } 1 - p \end{cases}$$

Wenn wir nach k Perioden bei Zeit k oder t_k sind, haben sich k Returns

$$\text{ret}_1, \dots, \text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$$

realisiert und den aktuellen Underlyingspreis S_k können wir schreiben als

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_{k-2} (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &\quad \vdots \\ &= S_1 (1 + \text{ret}_2) \cdots (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_1) (1 + \text{ret}_2) \cdots (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_0 \prod_{j=1}^k (1 + \text{ret}_j) \end{aligned}$$

Die ret_j sind entweder up-returns oder down-returns. Nehmen wir an, dass wir ℓ up-returns haben, dann müssen die restlichen $k - \ell$ Returns also down-returns sein. Wenn die Anzahl der up-returns festgelegt ist, spielt es keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt diese Returns auftreten, der Underlyingpreis ist dann immer gegeben durch

$$\begin{aligned} S_k &= S_0 \prod_{j=1}^k (1 + \text{ret}_j) \stackrel{\ell \text{ up-returns}}{=} S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell} \\ &=: S_{k,\ell} \end{aligned}$$

In dem Theorem 5.1 konnten wir nun eine Wahrscheinlichkeit

$$p = p_{\text{rn}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

angeben, die es ermöglicht, den Preis V_0 der Option $H = H(S_N)$ in folgender Weise zu schreiben:

$$V_0 = (1 + r)^{-N} \mathbb{E}_{\text{rn}}[H(S_N)]$$

Den Erwartungswert in dieser Formel können wir jetzt folgendermassen berechnen: Es sei $\chi(A)$ die Indikatorfunktion, definiert durch (A ist eine beliebige logische Aussage)

$$\chi(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } A = \text{True} \\ 0 & \text{falls } A = \text{False} \end{cases}$$

Wenn wir N up- oder down-Returns haben, sind davon entweder 0, 1, 2, ... oder N up>Returns. Also können wir schreiben:

$$1 = \sum_{\ell=0}^N \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})$$

und bekommen dann für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\text{rn}}[H(S_N)] &= \mathbb{E}_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_{\text{rn}}\left[\sum_{\ell=0}^N \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}) H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N \mathbb{E}_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right) \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N \mathbb{E}_{\text{rn}}\left[H(S_{N,\ell}) \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \mathbb{E}_{\text{rn}}\left[\chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \end{aligned}$$

Es gibt einen up-return mit Wahrscheinlichkeit p_{rn} . Die Wahrscheinlichkeit, dass etwa die ersten ℓ Returns up-returns sind und die nächsten $N - \ell$ Returns down-returns sind, ist dann gegeben durch

$$p_{\text{rn}}^\ell \times (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$$

Jetzt müssen aber nicht die ersten ℓ Returns die up-returns sein, sondern es können irgendwelche der N Returns die ℓ up-returns sein. Jede solche Auswahl von ℓ up-returns aus den N Returns liefert einen Beitrag $p_{\text{rn}}^\ell \times (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$ zur Wahrscheinlichkeit. Jetzt muss man sich nur noch überlegen, auf wieviele Art und Weisen man aus N Returns, oder aus N Plätzen

$$1, 2, \dots, N$$

eine Anzahl von ℓ Plätze auswählen kann. Das ist wie Ziehung der Lottozahlen, da gibt es 49 über 6 Möglichkeiten oder allgemein dann also

$$\binom{N}{\ell} = \frac{N!}{\ell!(N-\ell)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-\ell+1)}{1\cdot2\cdots\ell}$$

Möglichkeiten. Also bekommen wir

$$\text{Prob}\left[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\right] = \binom{N}{\ell} \times p_{\text{rn}}^\ell \times (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$$

und für den Erwartungswert $E_{\text{rn}}[H(S_N)]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{rn}}[H(S_N)] &= E_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}\left[\ell \text{ out of } N \text{ returns are up returns}\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \times p_{\text{rn}}^\ell (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell} \end{aligned}$$

Damit haben wir dann das folgende Theorem 5.2 bewiesen:

Theorem 5.2: Consider a price process $S_k = S(t_k)$ given by a Binomial model with returns $\text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$ and let r denote the interest rate per period. Let p_{rn} be the risk neutral probability given by

$$p_{\text{rn}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

Let

$$H = H(S_N)$$

be the payoff of some path independent option which depends on the underlying at maturity only. Then the time zero theoretical fair value V_0 of this option can be written as

$$V_0 = (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^\ell (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell} \quad (1)$$

with

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell}.$$

Machen wir noch ein kleines Beispiel als consistency-check:

Beispiel: Nehmen wir an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Betrachten wir den pfadunabhängigen Payoff

$$H(S_N) = S_N$$

Man bekommt also einfach den Wert des Underlyings bei Fälligkeit oder Maturity t_N oder nach N Perioden ausbezahlt. Diese Auszahlung kann man garantieren, wenn man zum Zeitpunkt t_0 , bei Start der Option, einfach das Underlying kauft, das kostet dann S_0 . Man hat also $\delta_0 = 1$, man kauft 1 Stück vom Underlying, und hält das ganz einfach bis Fälligkeit. In diesem Fall muss man also das Hedge-Portfolio nicht nach jeder Periode anpassen, sondern man hat für alle delta's

$$\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{N-1} = 1 ,$$

da ändert sich nichts. Man sagt auch, man hat einen statischen Hedge. Der Preis der Option H , das ist also das Geld, was man braucht, um diese Handelsstrategie machen zu können, ist dann offensichtlich

$$V_0 = S_0 ,$$

soviel Geld braucht man ja am Anfang, um das Underlying kaufen zu können, und der Wert des replizierenden Portfolios zur Zeit t_N ist dann

$$\begin{aligned} V_N &= V_0 + \sum_{k=1}^N \delta_{k-1} (S_k - S_{k-1}) \\ &= S_0 + \sum_{k=1}^N 1 \cdot (S_k - S_{k-1}) \\ &= S_0 + S_N - S_0 = S_N = H(S_N) \end{aligned}$$

also der Option-Payoff.

Checken wir jetzt, dass wir dasselbe Resultat, $V_0 = S_0$, erhalten, wenn wir die Formel aus dem Theorem 5.2 anwenden: Wir bekommen mit $r = 0$ und $H(S_N) = S_N$

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rt_N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{rn}^\ell (1-p_{rn})^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N S_{N,\ell} \times \binom{N}{\ell} p_{rn}^\ell (1-p_{rn})^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell} \times \binom{N}{\ell} p_{rn}^\ell (1-p_{rn})^{N-\ell} \\ &= S_0 \sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} [p_{rn}(1 + \text{ret}_{\text{up}})]^\ell [(1-p_{rn})(1 + \text{ret}_{\text{down}})]^{N-\ell} \end{aligned}$$

Mit der binomischen Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned} V_0 &= S_0 \left\{ [p_{rn}(1 + \text{ret}_{\text{up}})] + [(1 - p_{rn})(1 + \text{ret}_{\text{down}})] \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ p_{rn} + 1 - p_{rn} + p_{rn} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{rn}) \text{ret}_{\text{down}} \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ 1 + p_{rn} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{rn}) \text{ret}_{\text{down}} \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ 1 + 0 \right\}^N = S_0 \end{aligned}$$

denn

$$p_{rn} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{rn}) \text{ret}_{\text{down}} = \frac{-\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \text{ret}_{\text{up}} + \frac{\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \text{ret}_{\text{down}} = 0.$$

Damit haben wir die explizite Pricing-Formel (1) also für diesen einfachen Fall nochmal gecheckt.