week5: Kapitel 4: Das N-Perioden Binomialmodell, Teil2

In der letzten Veranstaltung hatten wir das Binmialmodell als ein zeitdiskretes Assetpreismodell definiert, was von einem Zeitpunkt t_{k-1} zum nächsten Zeitpunkt t_k jeweils immer nur 2 Einstellungmöglichkeiten zulässt, das war die folgende

Definition 4.2: If the price process $S_k = S(t_k)$ of some tradable asset S has the dynamics

$$S_k \;=\; S_{k-1}(\,1 \,+\, \mathrm{ret}_k\,) \qquad \text{with} \quad \mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\} \tag{1}$$

for all k, then we say that S is given by the Binomial model.

Dann hatten wir das folgende Theorem bewiesen:

Theorem 4.1: Let S be some tradable asset whose price process is given by the Binomial model (1). Let r be some interest rate per period such that cash amounts G change their values according to $G \overset{t_{k-1}\to t_k}{\to} G(1+r)$. Then every option payoff

$$H \;=\; H(S_0, ..., S_N)$$

can be replicated. A replicating strategy is given by, for $k = 0, 1, ..., N-1$:

$$\delta_k \;=\; \delta_k(S_0, \cdots, S_k) \;=\; \frac{V_{k+1}^{\mathrm{up}} \,-\, V_{k+1}^{\mathrm{down}}}{S_{k+1}^{\mathrm{up}} \,-\, S_{k+1}^{\mathrm{down}}} \tag{2}$$

with the abbreviations

$$\begin{aligned} S_{k+1}^{\mathrm{up/down}} \;&:=\; S_k\,(\,1 \,+\, \mathrm{ret}_{\mathrm{up/down}}\,) \\ V_{k+1}^{\mathrm{up/down}} \;&:=\; V_{k+1}\big(\,S_0\,,\,\cdots\,,\,S_k\,,\,S_{k+1}^{\mathrm{up/down}}\,\big) \end{aligned}$$

and the portfolio values V_k, including the theoretical fair value, the option price V_0, can be inductively calculated through the following formulae:

$$V_k \;=\; (1+r)^k\, v_k$$

with discounted portfolio values v_k given recursively by

$$v_k \;=\; w_{\mathrm{up}}\, v_{k+1}^{\mathrm{up}} \,+\, w_{\mathrm{down}}\, v_{k+1}^{\mathrm{down}} \tag{3}$$

and the recursion starts at $k = N$ with discounted portfolio values

$$v_N \;:=\; (1+r)^{-N}\, H(S_0, \cdots, S_N)$$

The weights w_{up} and w_{down} are given by

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{r \;-\; \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \tag{4}$$

$$w_{\text{down}} \;=\; 1 - w_{\text{up}} \;=\; \frac{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; r}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \;. \tag{5}$$

Remarks: 1) If H is a path-independent or non-exotic option which depends only on the underlying price at maturity,

$$H \;=\; H(S_N)$$

then the δ_k and the value of the replicating portfolio V_k at t_k depend only on the asset price S_k and do not depend on earlier prices $S_{k-1}, S_{k-2}, ..., S_0$. That is,

$$\begin{aligned} V_k \;&=\; V_k(S_k) \\ \delta_k \;&=\; \delta_k(S_k) \end{aligned}$$

2) Assume zero interest rates $r = 0$ such that $R = 1 + r = 1$ and $v_k = V_k$. Then (3) becomes

$$V_k \;=\; w_{\text{up}}\, V_{k+1}^{\text{up}} \;+\; w_{\text{down}}\, V_{k+1}^{\text{down}}$$

with weights

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} \;&=\; \frac{r \;-\; \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \;=\; \frac{-\;\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \\ w_{\text{down}} \;&=\; \frac{+\;\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} \;-\; \text{ret}_{\text{down}}} \end{aligned}$$

If we further assume a ‘symmetric’ Binomial model with (say, $q = 1\%$ or $q = 5\%$)

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} \;&=\; +\,q \\ \text{ret}_{\text{down}} \;&=\; -\,q \end{aligned}$$

the weights simplify to

$$w_{\text{up}} \;=\; \frac{-(-q)}{2q} \;=\; \frac{1}{2} \;=\; w_{\text{down}}$$

and we arrive at the simple recursion formula

$$V_k \;=\; \frac{V_{k+1}^{\text{up}} \;+\; V_{k+1}^{\text{down}}}{2} \;. \tag{6}$$

Die Option, die wir in der Übung in der letzten Veranstaltung durchgerechnet hatten, das war eine Standard-Kauf-Option, ist eine pfadunabhängige Option, die Auszahlung H hängt nur vom Underlyingpreis S_N bei Maturity ab, $H = H(S_N)$. In dem nächsten Beispiel 2 betrachten wir eine pfadabhängige oder auch 'exotische' Option. Bei solchen Optionen tut die Auszahlung H nicht nur von dem Underlyingpreis bei Maturity S_N abhängen, sondern sie hängt von dem gesamten realisierten Preispfad ab, $H = H(S_0, S_1, \cdots, S_N)$. In einem solchen Fall ist es nicht mehr ausreichend, einen rekombinierenden Binomialbaum mit $N+1$ Endpunkten zu betrachten wie in dem letzten Beispiel, sondern wir müssen eine Baumstruktur mit 2^N Endpunkten betrachten. Schauen wir uns das an:

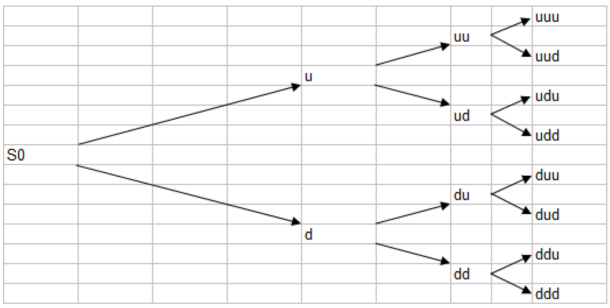
Beispiel 2: Wir betrachten wieder ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times (1 + \mathrm{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch $\mathrm{ret}_k \in \{+10\%\,,\, -10\%\}$ für $k = 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine All Time High Option mit Auszahlung

$$H\big(\{S_k\}\big) \;=\; \max_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k \;-\; S_0 \;.$$

a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 End-Punkten zu betrachten (wie in Beispiel 1), sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n-Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus dem Theorem 4.1.

b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ's, die Anzahl der Stücke vom Underlying, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.

c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned} \mathrm{Pfad}_1 &:= \{\mathrm{up}, \mathrm{up}, \mathrm{up}\} \\ \mathrm{Pfad}_2 &:= \{\mathrm{up}, \mathrm{down}, \mathrm{down}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.