Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2025/26

8. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell auf dem Intervall

$$[0,T] \quad \approx \quad \big\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, (N-1)\Delta t, N\Delta t = T\big\}$$

ist gegeben durch die Rekursion

$$S_{t_k} \quad = \quad S_{t_{k-1}} \left(1 + \mu \, \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \, \phi_k \right) \tag{1}$$

mit reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass für kleine Δt die Rekursion (1) näherungsweise durch den folgenden Ausdruck gelöst wird,

$$S_{t_k} \quad = \quad S_{t_0} \, \exp\left\{ \mu \, t_k + \sigma \, x_{t_k} - \frac{\sigma^2 t_k}{2} \right\} \tag{2}$$

Dabei ist

$$x_{t_k} \quad := \quad \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{3}$$

eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit. Führen Sie folgende Berechnungen durch mit Hilfe von Excel/VBA:

a) Simulieren und plotten Sie einige Pfade der Brownschen Bewegung gegeben durch (3).

b) Simulieren und plotten Sie die Pfade für das zeitdiskrete Black-Scholes Modell gegeben durch (1), etwa für $S_0 = 100$, $\mu = 4\%$, $\sigma = 20\%$ und $T = 10$.

c) Simulieren und plotten Sie die Pfade für die geometrische Brownsche Bewegung gegeben durch (2) und zeigen Sie, dass sie für kleine Δt mit den Pfaden aus (1) übereinstimmen.

Dieses Übungsblatt wird in der nächsten Veranstaltung vorgerechnet.