Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2025/26

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ eines Underlyings S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+\mathrm{ret_{up}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{up}} \\ (1+\mathrm{ret_{down}}) & \text{mit W'keit } \; p_{\mathrm{down}} = 1 - p_{\mathrm{up}} \end{cases} \tag{1}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0$, $t_1 = 1\text{week}$, $t_2 = 2\text{weeks}$, $t_3 = 3\text{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

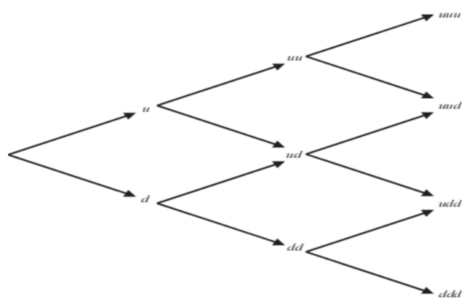
$$\begin{aligned} \mathrm{ret_{up}} &= +10\% \\ \mathrm{ret_{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\mathrm{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$ und die Zinsen seien null, $r = 0$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ, der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} \;:=\; S_0 (1+\mathrm{ret_{up}})^{\ell} (1+\mathrm{ret_{down}})^{k-\ell} \tag{2}$$

a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Preise durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die numerischen Werte für die jeweiligen Preise $S_{k,\ell}$ ein.

..bitte wenden

b) Zeigen Sie, dass sich die Rekursionsformel für die Portfoliowerte V_k aus der Vorlesung sich in diesem Fall auf die Formel

$$V_k \quad = \quad \frac{V_{k+1}^{\mathrm{up}} + V_{k+1}^{\mathrm{down}}}{2}$$

reduziert.

c) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option (englisch: call option) mit Fälligkeit (maturity) $t_N = t_3 = 3$weeks und Auszahlungsfunktion (payoff)

$$H_{\mathrm{call}}(S_3) \quad = \quad \max\{S_3 - 100\,,\, 0\} \tag{3}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel aus Teil (b) verwenden.

d) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den Payoff (3) replizieren kann.

e) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pfad}_1 \quad &:= \quad \{\mathrm{down}, \mathrm{up}, \mathrm{up}\} \\ \mathrm{Pfad}_2 \quad &:= \quad \{\mathrm{up}, \mathrm{up}, \mathrm{down}\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ's aus Teil (d) tatsächlich die Optionsauszahlung (3) replizieren tut.