

11. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Gegeben sei eine Standard-Kauf-Option mit Laufzeit $T = 4$ Jahre und Ausübungspreis (oder englisch ‘strike’) $K = 120$,

$$H_{\text{call}}(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$ und der jährliche Zinssatz liege bei $r = 3\%$. Berechnen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung den Zeit-0 Preis $V_{\text{call},0}$ dieser Option. Die Volatilität betrage $\sigma = 25\%$. Die Werte der $N(x)$ -Funktion stehen auf einem Taschenrechner typischerweise nicht zur Verfügung, benutzen Sie dazu die angehängte Tabelle.

2. Aufgabe: Beweisen Sie die Call-Put-Parität: Für die Optionspreise von Standard Call- und Put-Optionen im Black-Scholes Modell gilt die Formel:

$$V_{\text{call},0} - V_{\text{put},0} = S_0 - e^{-rT} K.$$

3. Aufgabe: Bei Optionen unterscheidet man grob zwischen ‘performance-type’ Optionen, bei denen der payoff eine Funktion der performance S_T/S_0 ist, und payoffs in ‘absolute amount’, bei denen der payoff, wie bei einem Standard-Call, etwa durch $H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ gegeben ist. Wir betrachten eine ‘at the money performance type’ Call-Option mit Fälligkeitsdatum T (‘at the money’ meint strike = 1 = 100% und nicht etwa 80% oder 120%) und payoff

$$H_{\text{call,perf}}(S_T) = \max\{S_T/S_0 - 1, 0\}$$

Wir nehmen an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Es bezeichne V_0^{BS} den Black-Scholes Preis der Option bei $t = 0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung:

$$V_0^{\text{BS}} = N(\sigma\sqrt{T}/2) - N(-\sigma\sqrt{T}/2)$$

$$\text{mit } N(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

b) Zeigen Sie, dass für kleinere Werte von $\sigma\sqrt{T}$, etwa $\sigma\sqrt{T} \lesssim 1$, der Preis aus (a) angenähert werden kann durch

$$V_0^{\text{BS}} \approx \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4 \times \sigma\sqrt{T}.$$

x	N(x)
0.00	0.5000
0.01	0.5040
0.02	0.5080
0.03	0.5120
0.04	0.5160
0.05	0.5199
0.06	0.5239
0.07	0.5279
0.08	0.5319
0.09	0.5359
0.10	0.5398
0.11	0.5438
0.12	0.5478
0.13	0.5517
0.14	0.5557
0.15	0.5596
0.16	0.5636
0.17	0.5675
0.18	0.5714
0.19	0.5753
0.20	0.5793
0.21	0.5832
0.22	0.5871
0.23	0.5910
0.24	0.5948
0.25	0.5987
0.26	0.6026
0.27	0.6064
0.28	0.6103
0.29	0.6141
0.30	0.6179
0.31	0.6217
0.32	0.6255
0.33	0.6293
0.34	0.6331
0.35	0.6368
0.36	0.6406
0.37	0.6443
0.38	0.6480
0.39	0.6517
0.40	0.6554
0.41	0.6591
0.42	0.6628
0.43	0.6664
0.44	0.6700
0.45	0.6736
0.46	0.6772
0.47	0.6808
0.48	0.6844
0.49	0.6879

x	N(x)
0.50	0.6915
0.51	0.6950
0.52	0.6985
0.53	0.7019
0.54	0.7054
0.55	0.7088
0.56	0.7123
0.57	0.7157
0.58	0.7190
0.59	0.7224
0.60	0.7257
0.61	0.7291
0.62	0.7324
0.63	0.7357
0.64	0.7389
0.65	0.7422
0.66	0.7454
0.67	0.7486
0.68	0.7517
0.69	0.7549
0.70	0.7580
0.71	0.7611
0.72	0.7642
0.73	0.7673
0.74	0.7704
0.75	0.7734
0.76	0.7764
0.77	0.7794
0.78	0.7823
0.79	0.7852
0.80	0.7881
0.81	0.7910
0.82	0.7939
0.83	0.7967
0.84	0.7995
0.85	0.8023
0.86	0.8051
0.87	0.8078
0.88	0.8106
0.89	0.8133
0.90	0.8159
0.91	0.8186
0.92	0.8212
0.93	0.8238
0.94	0.8264
0.95	0.8289
0.96	0.8315
0.97	0.8340
0.98	0.8365
0.99	0.8389

x	N(x)
1.00	0.8413
1.01	0.8438
1.02	0.8461
1.03	0.8485
1.04	0.8508
1.05	0.8531
1.06	0.8554
1.07	0.8577
1.08	0.8599
1.09	0.8621
1.10	0.8643
1.11	0.8665
1.12	0.8686
1.13	0.8708
1.14	0.8729
1.15	0.8749
1.16	0.8770
1.17	0.8790
1.18	0.8810
1.19	0.8830
1.20	0.8849
1.21	0.8869
1.22	0.8888
1.23	0.8907
1.24	0.8925
1.25	0.8944
1.26	0.8962
1.27	0.8980
1.28	0.8997
1.29	0.9015
1.30	0.9032
1.31	0.9049
1.32	0.9066
1.33	0.9082
1.34	0.9099
1.35	0.9115
1.36	0.9131
1.37	0.9147
1.38	0.9162
1.39	0.9177
1.40	0.9192
1.41	0.9207
1.42	0.9222
1.43	0.9236
1.44	0.9251
1.45	0.9265
1.46	0.9279
1.47	0.9292
1.48	0.9306
1.49	0.9319

x	N(x)
1.50	0.9332
1.51	0.9345
1.52	0.9357
1.53	0.9370
1.54	0.9382
1.55	0.9394
1.56	0.9406
1.57	0.9418
1.58	0.9429
1.59	0.9441
1.60	0.9452
1.61	0.9463
1.62	0.9474
1.63	0.9484
1.64	0.9495
1.65	0.9505
1.66	0.9515
1.67	0.9525
1.68	0.9535
1.69	0.9545
1.70	0.9554
1.71	0.9564
1.72	0.9573
1.73	0.9582
1.74	0.9591
1.75	0.9599
1.76	0.9608
1.77	0.9616
1.78	0.9625
1.79	0.9633
1.80	0.9641
1.81	0.9649
1.82	0.9656
1.83	0.9664
1.84	0.9671
1.85	0.9678
1.86	0.9686
1.87	0.9693
1.88	0.9699
1.89	0.9706
1.90	0.9713
1.91	0.9719
1.92	0.9726
1.93	0.9732
1.94	0.9738
1.95	0.9744
1.96	0.9750
1.97	0.9756
1.98	0.9761
1.99	0.9767

x	N(x)
2.00	0.9772
2.01	0.9778
2.02	0.9783
2.03	0.9788
2.04	0.9793
2.05	0.9798
2.06	0.9803
2.07	0.9808
2.08	0.9812
2.09	0.9817
2.10	0.9821
2.11	0.9826
2.12	0.9830
2.13	0.9834
2.14	0.9838
2.15	0.9842
2.16	0.9846
2.17	0.9850
2.18	0.9854
2.19	0.9857
2.20	0.9861
2.21	0.9864
2.22	0.9868
2.23	0.9871
2.24	0.9875
2.25	0.9878
2.26	0.9881
2.27	0.9884
2.28	0.9887
2.29	0.9890
2.30	0.9893
2.31	0.9896
2.32	0.9898
2.33	0.9901
2.34	0.9904
2.35	0.9906
2.36	0.9909
2.37	0.9911
2.38	0.9913
2.39	0.9916
2.40	0.9918
2.41	0.9920
2.42	0.9922
2.43	0.9925
2.44	0.9927
2.45	0.9929
2.46	0.9931
2.47	0.9932
2.48	0.9934
2.49	0.9936

x	N(x)
2.50	0.9938
2.51	0.9940
2.52	0.9941
2.53	0.9943
2.54	0.9945
2.55	0.9946
2.56	0.9948
2.57	0.9949
2.58	0.9951
2.59	0.9952
2.60	0.9953
2.61	0.9955
2.62	0.9956
2.63	0.9957
2.64	0.9959
2.65	0.9960
2.66	0.9961
2.67	0.9962
2.68	0.9963
2.69	0.9964
2.70	0.9965
2.71	0.9966
2.72	0.9967
2.73	0.9968
2.74	0.9969
2.75	0.9970
2.76	0.9971
2.77	0.9972
2.78	0.9973
2.79	0.9974
2.80	0.9974
2.81	0.9975
2.82	0.9976
2.83	0.9977
2.84	0.9977
2.85	0.9978
2.86	0.9979
2.87	0.9979
2.88	0.9980
2.89	0.9981
2.90	0.9981
2.91	0.9982
2.92	0.9982
2.93	0.9983
2.94	0.9984
2.95	0.9984
2.96	0.9985
2.97	0.9985
2.98	0.9986
2.99	0.9986

x	N(x)
3.00	0.9987
3.01	0.9987
3.02	0.9987
3.03	0.9988
3.04	0.9988
3.05	0.9989
3.06	0.9989
3.07	0.9989
3.08	0.9990
3.09	0.9990
3.10	0.9990
3.11	0.9991
3.12	0.9991
3.13	0.9991
3.14	0.9992
3.15	0.9992
3.16	0.9992
3.17	0.9992
3.18	0.9993
3.19	0.9993
3.20	0.9993
3.21	0.9993
3.22	0.9994
3.23	0.9994
3.24	0.9994
3.25	0.9994
3.26	0.9994
3.27	0.9995
3.28	0.9995
3.29	0.9995
3.30	0.9995
3.31	0.9995
3.32	0.9995
3.33	0.9996
3.34	0.9996
3.35	0.9996
3.36	0.9996
3.37	0.9996
3.38	0.9996
3.39	0.9997
3.40	0.9997
3.41	0.9997
3.42	0.9997
3.43	0.9997
3.44	0.9997
3.45	0.9997
3.46	0.9997
3.47	0.9997
3.48	0.9997
3.49	0.9998

x	N(x)
3.50	0.9998
3.51	0.9998
3.52	0.9998
3.53	0.9998
3.54	0.9998
3.55	0.9998
3.56	0.9998
3.57	0.9998
3.58	0.9998
3.59	0.9998
3.60	0.9998
3.61	0.9998
3.62	0.9999
3.63	0.9999
3.64	0.9999
3.65	0.9999
3.66	0.9999
3.67	0.9999
3.68	0.9999
3.69	0.9999
3.70	0.9999
3.71	0.9999
3.72	0.9999
3.73	0.9999
3.74	0.9999
3.75	0.9999
3.76	0.9999
3.77	0.9999
3.78	0.9999
3.79	0.9999
3.80	0.9999
3.81	0.9999
3.82	0.9999
3.83	0.9999
3.84	0.9999
3.85	0.9999
3.86	0.9999
3.87	0.9999
3.88	0.9999
3.89	0.9999
3.90	1.0000
3.91	1.0000
3.92	1.0000
3.93	1.0000
3.94	1.0000
3.95	1.0000
3.96	1.0000
3.97	1.0000
3.98	1.0000
3.99	1.0000

x	N(x)
0.00	0.5000
-0.01	0.4960
-0.02	0.4920
-0.03	0.4880
-0.04	0.4840
-0.05	0.4801
-0.06	0.4761
-0.07	0.4721
-0.08	0.4681
-0.09	0.4641
-0.10	0.4602
-0.11	0.4562
-0.12	0.4522
-0.13	0.4483
-0.14	0.4443
-0.15	0.4404
-0.16	0.4364
-0.17	0.4325
-0.18	0.4286
-0.19	0.4247
-0.20	0.4207
-0.21	0.4168
-0.22	0.4129
-0.23	0.4090
-0.24	0.4052
-0.25	0.4013
-0.26	0.3974
-0.27	0.3936
-0.28	0.3897
-0.29	0.3859
-0.30	0.3821
-0.31	0.3783
-0.32	0.3745
-0.33	0.3707
-0.34	0.3669
-0.35	0.3632
-0.36	0.3594
-0.37	0.3557
-0.38	0.3520
-0.39	0.3483
-0.40	0.3446
-0.41	0.3409
-0.42	0.3372
-0.43	0.3336
-0.44	0.3300
-0.45	0.3264
-0.46	0.3228
-0.47	0.3192
-0.48	0.3156
-0.49	0.3121

x	N(x)
-0.50	0.3085
-0.51	0.3050
-0.52	0.3015
-0.53	0.2981
-0.54	0.2946
-0.55	0.2912
-0.56	0.2877
-0.57	0.2843
-0.58	0.2810
-0.59	0.2776
-0.60	0.2743
-0.61	0.2709
-0.62	0.2676
-0.63	0.2643
-0.64	0.2611
-0.65	0.2578
-0.66	0.2546
-0.67	0.2514
-0.68	0.2483
-0.69	0.2451
-0.70	0.2420
-0.71	0.2389
-0.72	0.2358
-0.73	0.2327
-0.74	0.2296
-0.75	0.2266
-0.76	0.2236
-0.77	0.2206
-0.78	0.2177
-0.79	0.2148
-0.80	0.2119
-0.81	0.2090
-0.82	0.2061
-0.83	0.2033
-0.84	0.2005
-0.85	0.1977
-0.86	0.1949
-0.87	0.1922
-0.88	0.1894
-0.89	0.1867
-0.90	0.1841
-0.91	0.1814
-0.92	0.1788
-0.93	0.1762
-0.94	0.1736
-0.95	0.1711
-0.96	0.1685
-0.97	0.1660
-0.98	0.1635
-0.99	0.1611

x	N(x)
-1.00	0.1587
-1.01	0.1562
-1.02	0.1539
-1.03	0.1515
-1.04	0.1492
-1.05	0.1469
-1.06	0.1446
-1.07	0.1423
-1.08	0.1401
-1.09	0.1379
-1.10	0.1357
-1.11	0.1335
-1.12	0.1314
-1.13	0.1292
-1.14	0.1271
-1.15	0.1251
-1.16	0.1230
-1.17	0.1210
-1.18	0.1190
-1.19	0.1170
-1.20	0.1151
-1.21	0.1131
-1.22	0.1112
-1.23	0.1093
-1.24	0.1075
-1.25	0.1056
-1.26	0.1038
-1.27	0.1020
-1.28	0.1003
-1.29	0.0985
-1.30	0.0968
-1.31	0.0951
-1.32	0.0934
-1.33	0.0918
-1.34	0.0901
-1.35	0.0885
-1.36	0.0869
-1.37	0.0853
-1.38	0.0838
-1.39	0.0823
-1.40	0.0808
-1.41	0.0793
-1.42	0.0778
-1.43	0.0764
-1.44	0.0749
-1.45	0.0735
-1.46	0.0721
-1.47	0.0708
-1.48	0.0694
-1.49	0.0681

x	N(x)
-1.50	0.0668
-1.51	0.0655
-1.52	0.0643
-1.53	0.0630
-1.54	0.0618
-1.55	0.0606
-1.56	0.0594
-1.57	0.0582
-1.58	0.0571
-1.59	0.0559
-1.60	0.0548
-1.61	0.0537
-1.62	0.0526
-1.63	0.0516
-1.64	0.0505
-1.65	0.0495
-1.66	0.0485
-1.67	0.0475
-1.68	0.0465
-1.69	0.0455
-1.70	0.0446
-1.71	0.0436
-1.72	0.0427
-1.73	0.0418
-1.74	0.0409
-1.75	0.0401
-1.76	0.0392
-1.77	0.0384
-1.78	0.0375
-1.79	0.0367
-1.80	0.0359
-1.81	0.0351
-1.82	0.0344
-1.83	0.0336
-1.84	0.0329
-1.85	0.0322
-1.86	0.0314
-1.87	0.0307
-1.88	0.0301
-1.89	0.0294
-1.90	0.0287
-1.91	0.0281
-1.92	0.0274
-1.93	0.0268
-1.94	0.0262
-1.95	0.0256
-1.96	0.0250
-1.97	0.0244
-1.98	0.0239
-1.99	0.0233

x	N(x)
-2.00	0.0228
-2.01	0.0222
-2.02	0.0217
-2.03	0.0212
-2.04	0.0207
-2.05	0.0202
-2.06	0.0197
-2.07	0.0192
-2.08	0.0188
-2.09	0.0183
-2.10	0.0179
-2.11	0.0174
-2.12	0.0170
-2.13	0.0166
-2.14	0.0162
-2.15	0.0158
-2.16	0.0154
-2.17	0.0150
-2.18	0.0146
-2.19	0.0143
-2.20	0.0139
-2.21	0.0136
-2.22	0.0132
-2.23	0.0129
-2.24	0.0125
-2.25	0.0122
-2.26	0.0119
-2.27	0.0116
-2.28	0.0113
-2.29	0.0110
-2.30	0.0107
-2.31	0.0104
-2.32	0.0102
-2.33	0.0099
-2.34	0.0096
-2.35	0.0094
-2.36	0.0091
-2.37	0.0089
-2.38	0.0087
-2.39	0.0084
-2.40	0.0082
-2.41	0.0080
-2.42	0.0078
-2.43	0.0075
-2.44	0.0073
-2.45	0.0071
-2.46	0.0069
-2.47	0.0068
-2.48	0.0066
-2.49	0.0064

x	N(x)
-2.50	0.0062
-2.51	0.0060
-2.52	0.0059
-2.53	0.0057
-2.54	0.0055
-2.55	0.0054
-2.56	0.0052
-2.57	0.0051
-2.58	0.0049
-2.59	0.0048
-2.60	0.0047
-2.61	0.0045
-2.62	0.0044
-2.63	0.0043
-2.64	0.0041
-2.65	0.0040
-2.66	0.0039
-2.67	0.0038
-2.68	0.0037
-2.69	0.0036
-2.70	0.0035
-2.71	0.0034
-2.72	0.0033
-2.73	0.0032
-2.74	0.0031
-2.75	0.0030
-2.76	0.0029
-2.77	0.0028
-2.78	0.0027
-2.79	0.0026
-2.80	0.0026
-2.81	0.0025
-2.82	0.0024
-2.83	0.0023
-2.84	0.0023
-2.85	0.0022
-2.86	0.0021
-2.87	0.0021
-2.88	0.0020
-2.89	0.0019
-2.90	0.0019
-2.91	0.0018
-2.92	0.0018
-2.93	0.0017
-2.94	0.0016
-2.95	0.0016
-2.96	0.0015
-2.97	0.0015
-2.98	0.0014
-2.99	0.0014

x	N(x)
-3.00	0.0013
-3.01	0.0013
-3.02	0.0013
-3.03	0.0012
-3.04	0.0012
-3.05	0.0011
-3.06	0.0011
-3.07	0.0011
-3.08	0.0010
-3.09	0.0010
-3.10	0.0010
-3.11	0.0009
-3.12	0.0009
-3.13	0.0009
-3.14	0.0008
-3.15	0.0008
-3.16	0.0008
-3.17	0.0008
-3.18	0.0007
-3.19	0.0007
-3.20	0.0007
-3.21	0.0007
-3.22	0.0006
-3.23	0.0006
-3.24	0.0006
-3.25	0.0006
-3.26	0.0006
-3.27	0.0005
-3.28	0.0005
-3.29	0.0005
-3.30	0.0005
-3.31	0.0005
-3.32	0.0005
-3.33	0.0004
-3.34	0.0004
-3.35	0.0004
-3.36	0.0004
-3.37	0.0004
-3.38	0.0004
-3.39	0.0003
-3.40	0.0003
-3.41	0.0003
-3.42	0.0003
-3.43	0.0003
-3.44	0.0003
-3.45	0.0003
-3.46	0.0003
-3.47	0.0003
-3.48	0.0003
-3.49	0.0002

x	N(x)
-3.50	0.0002
-3.51	0.0002
-3.52	0.0002
-3.53	0.0002
-3.54	0.0002
-3.55	0.0002
-3.56	0.0002
-3.57	0.0002
-3.58	0.0002
-3.59	0.0002
-3.60	0.0002
-3.61	0.0002
-3.62	0.0001
-3.63	0.0001
-3.64	0.0001
-3.65	0.0001
-3.66	0.0001
-3.67	0.0001
-3.68	0.0001
-3.69	0.0001
-3.70	0.0001
-3.71	0.0001
-3.72	0.0001
-3.73	0.0001
-3.74	0.0001
-3.75	0.0001
-3.76	0.0001
-3.77	0.0001
-3.78	0.0001
-3.79	0.0001
-3.80	0.0001
-3.81	0.0001
-3.82	0.0001
-3.83	0.0001
-3.84	0.0001
-3.85	0.0001
-3.86	0.0001
-3.87	0.0001
-3.88	0.0001
-3.89	0.0001
-3.90	0.0000
-3.91	0.0000
-3.92	0.0000
-3.93	0.0000
-3.94	0.0000
-3.95	0.0000
-3.96	0.0000
-3.97	0.0000
-3.98	0.0000
-3.99	0.0000