

week13: Kapitel 3.3: Die Hamilton-Jakobi-Gleichung, Teil2

(dieses Material ist nicht mehr klausurrelevant)

Die Hamilton-Jakobi-Gleichung war durch das folgende Theorem 3.3.1 gegeben. Wir hatten sie letztes Mal im week12.pdf schon konkret am Beispiel 1, das war die Bewegung einer Punktmasse im Schwerfeld der Erde, überprüft. Jetzt wollen wir einen allgemeinen Beweis angeben.

Theorem 3.3.1 (Hamilton-Jacobi-Gleichung): Es sei

$$L = L(q, \dot{q}) = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

eine beliebige Funktion. Es sei $t < +\infty$ eine vorgegebene Zeit und $(q_s, \dot{q}_s)_{0 \leq s \leq t}$ sei eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, f \quad (2)$$

auf dem Intervall $[0, t]$ zu den Anfangsbedingungen

$$(q_{s=0}, \dot{q}_{s=0}) = (q_0, \dot{q}_0) \quad (3)$$

Wir setzen diese Lösung in die Lagrange-Funktion ein und definieren das Wirkungsintegral

$$S = \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s) ds =: \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) \quad (4)$$

was zunächst mal eine Funktion der Anfangsbedingungen und des Zeithorizonts t ist. Wir lösen die Gleichung

$$q_t = q_t(q_0, \dot{q}_0) \quad (5)$$

nach den $\dot{q}_0$ auf,

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_0(q_0, q_t) \quad (6)$$

und bekommen dann das Wirkungsintegral (4) als Funktion von q_0 , q_t und t :

$$S(q_0, q_t, t) := \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0(q_0, q_t), t) \quad (7)$$

Mit der Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{j=1}^f p_{j,t} \dot{q}_{j,t} - L(q_t, \dot{q}(q_t, p_t)) = H(q_t, p_t) \quad (8)$$

und den verallgemeinerten Impulsen $p_{j,t} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ gilt dann:

$$\nabla_{q_t} S = p_t \quad (9)$$

und

$$H(q_t, \nabla_{q_t} S(q_0, q_t, t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) = 0 \quad (10)$$

Die Identität (10) wird als die Hamilton-Jacobi-Gleichung bezeichnet.

Bevor wir einen allgemeinen Beweis der Hamilton-Jacobi-Gleichung angeben, wollen wir noch die folgende Folgerung festhalten.

Folgerung: Die Lagrange Funktion $L = L(q, \dot{q})$ hänge nicht explizit von der Zeit ab. Dann ist das H eine Konstante der Bewegung und wir können schreiben

$$\frac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) = -H = -E \quad (11)$$

und damit

$$S(q_0, q_t, t) = -Et + W(q_0, q_t) \quad (12)$$

mit einer Funktion $W = W(q_0, q_t)$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Für das W muss dann gelten (wir setzen das S aus (12) in die Hamilton-Jacobi-Gleichung (10) ein):

$$H(q_t, \nabla_{q_t} W(q_0, q_t)) = E. \quad (13)$$

Beweis Theorem 3.3.1: Mit

$$S = \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s) ds =: \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) = S(q_0, q_t, t) \quad (14)$$

bekommen wir

$$\frac{dS}{dt} = L(q_t, \dot{q}_t) = \frac{d}{dt} S(q_0, q_t, t) = \sum_{j=1}^f \frac{\partial S}{\partial q_{j,t}} \dot{q}_{j,t} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (15)$$

Nehmen wir an, wir haben die Identität (9)

$$\nabla_{q_t} S = p_t$$

schon gezeigt. Dann folgt aus (15)

$$L(q_t, \dot{q}_t) = \sum_{j=1}^f p_{j,t} \dot{q}_{j,t} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (16)$$

oder

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L(q_t, \dot{q}_t) - \sum_{j=1}^f p_{j,t} \dot{q}_j = -H \quad (17)$$

und das ist genau die Hamilton-Jacobi-Gleichung, also müssen wir nur noch die Identität (9) zeigen: Nach Definition der partiellen Ableitung ist mit $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, der j -te Standardbasisvektor,

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}}(q_0, q_t, t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{S(q_0, q_t + \Delta q e_j, t) - S(q_0, q_t, t)}{\Delta q}$$

Wir brauchen etwas Notation: Es sei

$$\{q_s\}_{0 \leq s \leq t} =: \{q_s^{(t, q_t)}\}_{0 \leq s \leq t}$$

der extremale Pfad, der zur Berechnung von $S(q_0, q_t, t)$ verwendet werden muss. Für diesen Pfad gilt also

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t, q_t)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t, q_t)} &= q_t \end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}} - \frac{\partial L}{\partial q_{i,s}} = 0$$

für alle $s \in [0, t]$. Zur Berechnung von $S(q_0, q_t + \Delta q e_j, t)$ brauchen wir einen neuen Pfad

$$\{q_s^{(t, q_t + \Delta q)}\}_{0 \leq s \leq t}$$

der soll ja in derselben Zeit bei gleichem Startpunkt einen anderen Zielpunkt erreichen, nämlich

$$\begin{aligned} q_{s=0}^{(t, q_t + \Delta q)} &= q_0 \\ q_{s=t}^{(t, q_t + \Delta q)} &= q_t + \Delta q e_j \end{aligned}$$

Das geht nur dadurch, dass wir andere Anfangsgeschwindigkeiten wählen. Der neue Pfad muss dann ebenfalls eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung sein. Wir haben dann

$$\begin{aligned} \Delta_j S &:= S(q_0, q_t + \Delta q e_j, t) - S(q_0, q_t, t) \\ &= \int_{t_0}^t L(q_s^{(t, q_t + \Delta q)}, \dot{q}_s^{(t, q_t + \Delta q)}) ds - \int_{t_0}^t L(q_s^{(t, q_t)}, \dot{q}_s^{(t, q_t)}) ds \\ &= \int_{t_0}^t \left[L(q_s^{(t, q_t + \Delta q)}, \dot{q}_s^{(t, q_t + \Delta q)}) - L(q_s^{(t, q_t)}, \dot{q}_s^{(t, q_t)}) \right] ds \end{aligned}$$

Wir definieren den Pfad

$$\eta_s^{\Delta q} := q_s^{(t, q_t + \Delta q)} - q_s^{(t, q_t)}$$

mit

$$\begin{aligned}\eta_{s=0}^{\Delta q} &= q_0^{(t,q_t+\Delta q)} - q_0^{(t,q_t)} = q_0 - q_0 = 0 \\ \eta_{s=t}^{\Delta q} &= q_t^{(t,q_t+\Delta q)} - q_t^{(t,q_t)} = q_t + \Delta q e_j - q_t = \Delta q e_j\end{aligned}$$

Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned}L(q_s^{(t,q_t+\Delta q)}, \dot{q}_s^{(t,q_t+\Delta q)}) - L(q_s^{(t,q_t)}, \dot{q}_s^{(t,q_t)}) \\ = \sum_{i=1}^f \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \eta_{i,s}^{\Delta q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \dot{\eta}_{i,s}^{\Delta q} \right\} + O[(\Delta q)^2]\end{aligned}$$

wobei das q_s in dem $\frac{\partial L}{\partial q_{i,s}}$ und dem $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}}$ ein $q_s^{(t,q_t)}$ ist. Damit bekommen wir bis auf Terme von der Grössenordnung $O[(\Delta q)^2]$:

$$\begin{aligned}\Delta_j S &= \sum_{i=1}^f \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \eta_{i,s}^{\Delta q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \dot{\eta}_{i,s}^{\Delta q} \right\} ds \\ &= \sum_{i=1}^f \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \eta_{i,s}^{\Delta q} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \eta_{i,s}^{\Delta q} \right\} ds + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,s}}(q_s, \dot{q}_s) \eta_{i,s}^{\Delta q} \Big|_{s=0}^{s=t} \\ &= \sum_{i=1}^f \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_s}(q_s, \dot{q}_s) - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(q_s, \dot{q}_s) \right\} \eta_s^{\Delta q} ds + \sum_{i=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,t}}(q_t, \dot{q}_t) \eta_{i,t}^{\Delta q} \\ &= 0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{j,t}}(q_t, \dot{q}_t) \Delta q \\ &= 0 + p_{j,t} \Delta q\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{\partial S}{\partial q_{j,t}} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta_j S}{\Delta q} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{p_{j,t} \Delta q + O[(\Delta q)^2]}{\Delta q} = p_{j,t}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eher von theoretischem Interesse, mit ihr lässt sich vielleicht am einfachsten der Übergang von der Quantenmechanik zur klassischen Mechanik verstehen, das können wir uns noch etwas genauer auf dem neuen Übungsblatt 13 anschauen. Zum Lösen von konkreten Problemen ist die Hamilton-Jacobi-Gleichung eher weniger geeignet.