

## week12: Kapitel 3.3: Die Hamilton-Jakobi-Gleichung, Teil1

(dieses Material ist nicht mehr klausurrelevant)

### Das klassische Wirkungsintegral

Das klassische Wirkungsintegral oder einfach die klassische Wirkung (klassisch meint hier nicht quantenmechanisch, in der QM wird diese Grösse ebenfalls diskutiert) ist gegeben durch

$$S = \int_{t_0}^t L(q_s, \dot{q}_s) ds \quad (1)$$

wobei das  $L = L(q_t, \dot{q}_t)$  die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems ist und das  $q_t = (q_{1,t}, \dots, q_{f,t})$  eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung ist,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, f \quad (2)$$

Schauen wir uns zunächst ein Beispiel an (ein Beispiel 2 gibt es auf dem neuen Ü-Blatt 12):

**Beispiel 1:** Bewegung im Schwerfeld der Erde: Die Bewegungsgleichung ist

$$m \ddot{\vec{x}} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (3)$$

oder

$$\ddot{\vec{x}} = -g \vec{e}_z \quad (4)$$

mit  $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$  und den Anfangsbedingungen, sagen wir,

$$\begin{aligned} \vec{x}_{t=0} &= \vec{x}_0 \\ \dot{\vec{x}}_{t=0} &= \vec{v}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_t &= \vec{v}_0 - gt \vec{e}_z \\ \vec{x}_t &= \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (6)$$

Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_t^2 - mgz_t \\ &= \frac{m}{2} [\vec{v}_0 - gt \vec{e}_z]^2 - mg \left[ \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \right]_3 \end{aligned} \quad (7)$$

oder

$$L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) / m = \frac{1}{2} \{ \vec{v}_0^2 - 2gt v_{0,z} + g^2 t^2 \} - g \{ z_0 + v_{0,z} t - \frac{gt^2}{2} \} \quad (8)$$

Also,

$$\begin{aligned} S/m &= \int_{t_0:=0}^t L(q_s, \dot{q}_s) / m \, ds \\ &= \frac{1}{2} \{ \vec{v}_0^2 t - g t^2 v_{0,z} + g^2 \frac{t^3}{3} \} - g \{ z_0 t + v_{0,z} \frac{t^2}{2} - g \frac{t^3}{6} \} \\ &= \frac{1}{2} \vec{v}_0^2 t - g t^2 v_{0,z} - g t z_0 + g^2 \frac{t^3}{3} \end{aligned} \quad (9)$$

Offensichtlich hängt das  $S$  ab von den Anfangsbedingungen  $\vec{x}_0$  und  $\vec{v}_0$  und dem betrachteten Zeithorizont  $t$ , das wird immer so sein. Jetzt wollen wir das  $\vec{v}_0$  aus (9) entfernen und dafür den Endpunkt  $\vec{x}_t$  gegeben durch Gleichung (6) in das  $S$  reinschreiben. Also wir wollen die Gleichung (6)

$$\vec{x}_t = \vec{x}_t(\vec{x}_0, \vec{v}_0) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z$$

nach  $\vec{v}_0$  auflösen,

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) = \frac{\vec{x}_t - \vec{x}_0 + \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z}{t} = \frac{\vec{x}_t - \vec{x}_0}{t} + \frac{gt}{2} \vec{e}_z \quad (10)$$

und das dann in das  $S$  einsetzen, dann bekommen wir eine Funktion, die nur noch vom Startpunkt  $\vec{x}_0$ , vom Endpunkt  $\vec{x}_t$  der tatsächlich durchlaufenden Bahnkurve  $\{\vec{x}_s\}_{0 \leq s \leq t}$  und dem Zeithorizont  $t$  abhängt:

$$S/m = S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)/m = \frac{t}{2} [\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)]^2 - gt^2 [\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)]_z - gt z_0 + \frac{g^2 t^3}{3} \quad (11)$$

oder, wenn wir das  $\vec{v}_0(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)$  aus Gleichung (10) konkret einsetzen,

$$\begin{aligned} S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)/m &= \frac{t}{2} \left[ \frac{\vec{x}_t - \vec{x}_0}{t} + \frac{gt}{2} \vec{e}_z \right]^2 - gt^2 \left[ \frac{\vec{x}_t - \vec{x}_0}{t} + \frac{gt}{2} \vec{e}_z \right]_z - gt z_0 + \frac{g^2 t^3}{3} \\ &= \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} + \frac{gt}{2} (z_t - z_0) + \frac{g^2 t^3}{8} - gt(z_t - z_0) - \frac{g^2 t^3}{2} - gt z_0 + \frac{g^2 t^3}{3} \\ &= \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} - \frac{gt}{2} (z_t - z_0) + \frac{3g^2 t^3}{24} - \frac{12g^2 t^3}{24} - gt z_0 + \frac{8g^2 t^3}{24} \\ &= \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{2t} - \frac{gt}{2} (z_t + z_0) - \frac{g^2 t^3}{24} \end{aligned} \quad (12)$$

Also,

$$S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} - gt(z_t + z_0) - \frac{g^2 t^3}{12} \right\} \quad (13)$$

## Hamilton-Jacobi-Gleichung

Kehren wir zum allgemeinen Setting zurück gegeben durch (1) und (2). Die Hamilton-Funktion ist

$$H = \sum_{j=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \quad (14)$$

Das ist zunächst mal, genauso wie das  $L = L(q_t, \dot{q}_t)$ , ebenfalls eine Funktion von  $q_t$  und  $\dot{q}_t$ . Im Kapitel 3.1 hatten wir gesehen, dass die natürlichen Variablen für die Hamilton-Funktion die  $q_{j,t}$  und die verallgemeinerten Impulse

$$p_{j,t} := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \quad (15)$$

sind, die  $\dot{q}_{j,t}$  kann man, zumindest im Prinzip, aus den Gleichungen (15) als Funktion der  $q_{j,t}$  und  $p_{j,t}$  schreiben und dann in das  $H$  einsetzen, wir haben dann also

$$H = \sum_{j=1}^f p_{j,t} \dot{q}_{j,t} - L(q_t, \dot{q}(q_t, p_t)) = H(q_t, p_t) \quad (16)$$

Berechnen wir eben die Hamilton-Funktion für das Beispiel 1:

**Beispiel 1, Hamilton-Funktion:** Mit

$$L(\vec{x}_t, \dot{\vec{x}}_t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}_t^2 - mgz_t = \frac{m}{2} [\dot{x}_t^2 + \dot{y}_t^2 + \dot{z}_t^2] - mgz_t \quad (17)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} p_{x,t} &= m\dot{x}_t \\ p_{y,t} &= m\dot{y}_t \\ p_{z,t} &= m\dot{z}_t \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) = \frac{\vec{p}_t^2}{2m} + mgz_t = \frac{1}{2m} [p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2 + p_{z,t}^2] + mgz_t \quad (19)$$

Die Hamilton-Jakobi-Gleichung ist dann durch das folgende Theorem gegeben:

**Theorem 3.3.1 (Hamilton-Jacobi-Gleichung):** Es sei

$$L = L(q, \dot{q}) = L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) : \mathbb{R}^{2f} \rightarrow \mathbb{R} \quad (20)$$

eine beliebige Funktion. Es sei  $t < +\infty$  eine vorgegebene Zeit und  $(q_s, \dot{q}_s)_{0 \leq s \leq t}$  sei eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, f \quad (21)$$

auf dem Intervall  $[0, t]$  zu den Anfangsbedingungen

$$(q_{s=0}, \dot{q}_{s=0}) = (q_0, \dot{q}_0) \quad (22)$$

Wir setzen diese Lösung in die Lagrange-Funktion ein und definieren das Wirkungsintegral

$$S = \int_0^t L(q_s, \dot{q}_s) ds =: \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0, t) \quad (23)$$

was zunächst mal eine Funktion der Anfangsbedingungen und des Zeithorizonts  $t$  ist. Wir lösen die Gleichung

$$q_t = q_t(q_0, \dot{q}_0) \quad (24)$$

nach den  $\dot{q}_0$  auf,

$$\dot{q}_0 = \dot{q}_0(q_0, q_t) \quad (25)$$

und bekommen dann das Wirkungsintegral (23) als Funktion von  $q_0$ ,  $q_t$  und  $t$ :

$$S(q_0, q_t, t) := \tilde{S}(q_0, \dot{q}_0(q_0, q_t), t) \quad (26)$$

Mit der Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{j=1}^f p_{j,t} \dot{q}_{j,t} - L(q_t, \dot{q}(q_t, p_t)) = H(q_t, p_t) \quad (27)$$

und den verallgemeinerten Impulsen  $p_{j,t} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$  gilt dann:

$$\nabla_{q_t} S = p_t \quad (28)$$

und

$$H(q_t, \nabla_{q_t} S(q_0, q_t, t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(q_0, q_t, t) = 0 \quad (29)$$

Die Identität (29) wird als die Hamilton-Jacobi-Gleichung bezeichnet.

Überprüfen wir die Identitäten (28) und (29) zunächst mal für unser Beispiel 1:

**Beispiel 1, Hamilton-Jacobi-Gleichung:** Das  $S$  war gegeben durch (13),

$$S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) = \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} - gt(z_t + z_0) - \frac{gt^3}{12} \right\}$$

und die Hamilton-Funktion hatten wir in (19) berechnet,

$$H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) = \frac{\vec{p}_t^2}{2m} + mgz_t = \frac{1}{2m} [p_{x,t}^2 + p_{y,t}^2 + p_{z,t}^2] + mgz_t$$

Wir bekommen

$$\nabla_{\vec{x}_t} S = \begin{pmatrix} \frac{\partial S}{\partial x_t} \\ \frac{\partial S}{\partial y_t} \\ \frac{\partial S}{\partial z_t} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{x_t - x_0}{t} \\ \frac{y_t - y_0}{t} \\ \frac{z_t - z_0}{t} - \frac{gt}{2} \end{pmatrix} = \frac{m}{t} \begin{pmatrix} x_t - x_0 \\ y_t - y_0 \\ z_t - z_0 - \frac{gt^2}{2} \end{pmatrix} \quad (30)$$

oder

$$\nabla_{\vec{x}_t} S = \frac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \right\} \quad (31)$$

Wegen (6),

$$\begin{aligned} \vec{x}_t &= \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \\ \dot{\vec{x}}_t &= \vec{v}_0 - gt \vec{e}_z \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_t - \vec{x}_0 - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z &= \vec{v}_0 t - gt^2 \vec{e}_z \\ &= t [\vec{v}_0 - gt \vec{e}_z] = t \dot{\vec{x}}_t \end{aligned} \quad (32)$$

und damit

$$\nabla_{\vec{x}_t} S = \frac{m}{t} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \right\} = m \dot{\vec{x}}_t = \vec{p}_t \quad (33)$$

Die Identität (28) ist also erfüllt. Die partielle Ableitung von  $S$  nach  $t$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t} - gt(z_t + z_0) - \frac{g^2 t^3}{12} \right\} \\ &= \frac{m}{2} \left\{ -\frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} - g(z_t + z_0) - \frac{g^2 t^2}{4} \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

Wir müssen zeigen, dass das gleich  $-H$  ist. Insbesondere ist das also zeitlich konstant, was auf den ersten Blick natürlich nicht so aussieht. Wir haben

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_t, \vec{p}_t) &= \frac{\vec{p}_t^2}{2m} + mgz_t \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{1}{2m} (\nabla_{\vec{x}_t} S)^2 + mgz_t \\ &\stackrel{(33)}{=} \frac{m}{2t^2} \left\{ \vec{x}_t - \vec{x}_0 - \frac{gt^2}{2} \vec{e}_z \right\}^2 + mgz_t \\ &= \frac{m}{2t^2} \left\{ (\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2 - gt^2(z_t - z_0) + \frac{g^2 t^4}{4} \right\} + mgz_t \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} - g(z_t - z_0) + \frac{g^2 t^2}{4} \right\} + mgz_t \\ &= \frac{m}{2} \left\{ \frac{(\vec{x}_t - \vec{x}_0)^2}{t^2} + g(z_t + z_0) + \frac{g^2 t^2}{4} \right\} \\ &\stackrel{(34)}{=} -\frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) \end{aligned} \quad (35)$$

also tatsächlich

$$H(\vec{x}_t, \nabla_{\vec{x}_t} S(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t)) + \frac{\partial S}{\partial t}(\vec{x}_0, \vec{x}_t, t) = 0 \quad (36)$$

Den allgemeinen Beweis der Hamilton-Jacobi-Gleichung können wir uns dann nächste Woche anschauen.