week10: Kapitel 3.1: Die Hamilton-Funktion und die Hamiltonschen Gleichungen

Es sei $L : \mathbb{R}^{2f} \to \mathbb{R}$,

$$L \;=\; L\big(q_1(t), \cdots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \cdots, \dot{q}_f(t)\big) \;=\; L\big(\, q(t)\,,\, \dot{q}(t)\,\big) \tag{1}$$

die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems. Im 2. Kapitel haben wir gesehen, dass die Dynamik des Systems beschrieben wird durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0 \qquad \forall\, j = 1, \cdots, f\ . \tag{2}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind ein System von f Differentialgleichungen 2. Ordnung für die f Funktionen $q_1(t), \cdots, q_f(t)$. Man kann sie umschreiben zu einem System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung. Das geht mit Hilfe des Hamilton-Formalismus. Wir beginnen mit der folgenden

Definition 3.1.1: Die Grössen

$$p_j \;:=\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \tag{3}$$

heissen die verallgemeinerten Impulse des Systems.

Beispiel 1) Wir betrachten ein N-Teilchensystem in kartesischen Koordinaten mit Lagrange-Funktion

$$L \;=\; L(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \cdots, \dot{\vec{x}}_N) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2}\, \dot{\vec{x}}_i^{\,2} \;-\; V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N) \tag{4}$$

Dann sind die verallgemeinerten Impulse gegeben durch

$$\vec{p}_i \;=\; \nabla_{\dot{\vec{x}}_i} L \;=\; m_i\, \dot{\vec{x}}_i \tag{5}$$

und stimmen mit den üblichen Impulsen überein.

Beispiel 2) Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens in der (x, y)-Ebene in Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Die Lagrange-Funktion ist $L = T - V = T - 0 = T$ mit der kinetischen Energie, das hatten wir auf dem 3. Übungsblatt gemacht,

$$T \;=\; \tfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 \,+\, r^2\dot{\varphi}^2\} \tag{6}$$

Wir erhalten also die folgenden verallgemeinerten Impulse:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \tag{7}$$
$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\,\dot{\varphi} \tag{8}$$

Wir machen mit den Beispielen dann später weiter. ■

Mit der Definition 3.1.1 können wir die Euler-Lagrange-Gleichungen dann auch folgendermassen schreiben:

$$\dot{p}_j = \frac{dp_j}{dt} \overset{\text{Def 3.1.1}}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\text{Euler−Lagrange}}{=} \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{9}$$

Wir wollen jetzt folgendes machen: Wir möchten L, oder eine geeignete Transformation davon (das wird dann die Hamilton-Funktion H sein), als Funktion von den $q_1, \cdots, q_f$ und den $p_1, \cdots p_f$ (anstatt der $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f$) auffassen, und dann ein DGL-System <u>erster</u> Ordnung herleiten, für die $2f$ Funktionen $q_1, \cdots, q_f$ und $p_1, \cdots p_f$. f Gleichungen erster Ordnung haben wir schon gefunden, das sind die Gleichungen (9). Wir brauchen noch einen zweiten Set von f Gleichungen. Dazu schreiben wir uns noch einmal die Definition der verallgemeinerten Impulse hin,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\big(q_1, \cdots, q_f, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f\big) \tag{10}$$

Wir wollen jetzt also die

$$q = (q_1, \cdots, q_f)$$
$$p = (p_1, \cdots, p_f)$$

als die unabhängigen Variablen oder als unabhängige Funktionen auffassen und müssen dann also die

$$\dot{q} = (\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f)$$

durch die q und p ausdrücken. Das könnten wir einfach dadurch machen, dass wir die f Gleichungen (10) nach den $\dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f$ auflösen,

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_1(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f) = \dot{q}_1(q,p) \\ &\vdots \\ \dot{q}_f &= \dot{q}_f(q_1, \cdots, q_f, p_1, \cdots, p_f) = \dot{q}_f(q,p) \end{aligned} \tag{11}$$

Es ist natürlich nicht klar, ob man das immer explizit mit konkreten analytischen Formeln wird machen können, im allgemeinen nicht, aber man braucht hier nur, dass das im Prinzip möglich wäre, ohne da jetzt eine explizite Formel zu haben. Bei den beiden Beispielen von oben können wir das mit expliziten analytischen Formeln machen, für Beispiel 1 bekommen wir

$$\dot{\vec{x}}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i} \tag{12}$$

und für Beispiel 2 ergibt sich

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} \tag{13}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \tag{14}$$

Bei Gleichung (14) können wir sehen, dass die $\dot{q}_j$ nicht nur von den p_j abhängen, sondern durchaus auch von den q_j abhängen können, da ist ja ein r^2 im Nenner und das r wäre ja ein q_j oder ein q_1 vielleicht.

Die Gleichungen (9) und (11), schreiben wir sie hier nochmal hin,

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}\big(q\,,\,\dot{q}(q,p)\big) \qquad \text{Euler-Lagrange-Gleichungen} \tag{15}$$

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p) \qquad \text{Auflösen von (10) nach } \dot{q} \tag{16}$$

sind dann ein System von $2f$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2f$ Funktionen $q_1, \cdots, q_f$ und $p_1, \cdots, p_f$. Es gilt nun das folgende

Theorem 3.1.2: a) Gegeben sei eine Lagrange-Funktion (1) und die $q_1, ..., q_f$ seinen Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen (2). Wir definieren die verallgemeinerten Impulse $p_1, ..., p_f$ durch (3) und fassen die $\dot{q}_j$ als Funktionen der (q_k, p_k) auf. Schliesslich definieren wir eine Hamilton-Funktion[1] $H = H(q,p)$ durch

$$H = H(q,p) := \sum_{j=1}^{f} p_j\,\dot{q}_j(q,p) - L\big(q,\dot{q}(q,p)\big) \tag{17}$$

Dann erfüllen die (q_j, p_j) die Hamiltonschen Gleichungen,

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{18}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{19}$$

b) Gegeben sei eine Hamilton-Funktion $H = H(q_1, ..., q_f, p_1, ..., p_f)$ und die (q_j, p_j) seien Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen (18,19). Über die Gleichung (18) können wir die p_j als Funktion der $(q_j, \dot{q}_j)$ auffasen. Wir definieren zu gegebenen H eine Lagrange-Funktion $L = L(q, \dot{q})$ durch

$$L(q,\dot{q}) := \sum_{j=1}^{f} p_j(q,\dot{q})\,\dot{q}_j - H\big(q, p(q,\dot{q})\big)$$

Dann gilt

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

und die q_j sind Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Beweis: a) Es gelte das System (15,16). Wir betrachten q und p als die unabhängigen Variablen. Ein $\frac{d}{dq}$ bedeutet, dass nach sämtlichen q's abgeleitet wird, die in der Formel

[1] das ist dieselbe Definition, die wir auch schon in Def. 2.5.3 in dem `week8.pdf` angegeben hatten

irgendwo auftauchen, wohingegen etwa ein $\frac{\partial L}{\partial q}\big(q,\dot{q}(q,p)\big)$ das L nur nach dem q in dem ersten Argument ableiten tut, nach dem q in dem $\dot{q}(q,p)$ wird also nicht abgeleitet. Wir können dann also schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_j} H(q_1, ..., q_f, p_1, ...p_f) \quad &= \quad \frac{d}{dq_j} H(q_1, ..., q_f, p_1, ...p_f) \\
&= \quad \frac{d}{dq_j}\left\{\sum_{k=1}^{f} p_k\,\dot{q}_k(q,p) \; - \; L\big(q,\dot{q}(q,p)\big)\right\} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial q_j} \; - \; \frac{d}{dq_j} L\big(q,\dot{q}(q,p)\big) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial q_j} \; - \; \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial q_j} \; - \; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial q_j} \\
&\overset{(10,15)}{=} \quad \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial q_j} \; - \; \dot{p}_j \; - \; \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial q_j} \\
&= \quad -\,\dot{p}_j
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial p_j} \; = \; \frac{dH}{dp_j} \quad &= \quad \frac{d}{dp_j}\left\{\sum_{k=1}^{f} p_k\,\dot{q}_k(q,p) \; - \; L\big(q,\dot{q}(q,p)\big)\right\} \\
&= \quad \dot{q}_j(q,p) \; + \; \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial p_j} \; - \; \frac{d}{dp_j} L\big(q,\dot{q}(q,p)\big) \\
&= \quad \dot{q}_j(q,p) \; + \; \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial p_j} \; - \; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial p_j} \\
&\overset{(10)}{=} \quad \dot{q}_j(q,p) \; + \; \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial p_j} \; - \; \sum_{k=1}^{f} p_k\,\frac{\partial \dot{q}_k(q,p)}{\partial p_j} \\
&= \quad \dot{q}_j(q,p)
\end{aligned}$$

b) Es gelten die Hamiltonschen Gleichungen. Dann bekommen wir zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \; = \; \frac{d}{d\dot{q}_j} L(q,\dot{q}) \quad &= \quad \frac{d}{d\dot{q}_j}\left\{\sum_{k=1}^{f} p_k(q,\dot{q})\,\dot{q}_k \; - \; H\big(q,p(q,\dot{q})\big)\right\} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_k \; + \; p_j(q,\dot{q}) \; - \; \frac{d}{d\dot{q}_j} H\big(q,p(q,\dot{q})\big) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_k \; + \; p_j(q,\dot{q}) \; - \; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\frac{\partial p_k(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \\
&\overset{(18)}{=} \quad \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\,\dot{q}_k \; + \; p_j(q,\dot{q}) \; - \; \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k\,\frac{\partial p_k(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j} \; = \; p_j \qquad (20)
\end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen dann aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q_j} L(q,\dot q) \;=\; \frac{d}{dq_j} L(q,\dot q) \;&=\; \frac{d}{dq_j}\Big\{ \sum_{k=1}^{f} p_k(q,\dot q)\, \dot q_k \;-\; H\big(q, p(q,\dot q)\big) \Big\} \\
&=\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot q)}{\partial q_j}\, \dot q_k \;-\; \frac{d}{dq_j} H\big(q, p(q,\dot q)\big) \\
&=\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot q)}{\partial q_j}\, \dot q_k \;-\; \frac{\partial H}{\partial q_j} \;-\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k(q,\dot q)}{\partial q_j} \\
&\overset{(18,19)}{=}\; \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial p_k(q,\dot q)}{\partial q_j}\, \dot q_k \;+\; \dot p_j \;-\; \sum_{k=1}^{f} \dot q_k \frac{\partial p_k(q,\dot q)}{\partial q_j} \\
&=\; \dot p_j \;=\; \frac{d}{dt}\, p_j \;\overset{(20)}{=}\; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}
\end{aligned}$$

denn das ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \;-\; \frac{\partial L}{\partial q_j} \;=\; 0$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ∎

Schauen wir uns an, wie das konkret für die beiden Beispiele von oben aussieht:

Beispiel 1) Wir hatten

$$L \;=\; L(\vec x_1, \cdots, \vec x_N, \dot{\vec x}_1, \cdots, \dot{\vec x}_N) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{m_i}{2}\, \dot{\vec x}_i^{\,2} \;-\; V(\vec x_1, \cdots, \vec x_N) \tag{21}$$

und

$$\vec p_i \;=\; \nabla_{\dot{\vec x}_i} L \;=\; m_i\, \dot{\vec x}_i \tag{22}$$

Also,

$$L \;=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{\vec p_i^{\,2}}{2m_i} \;-\; V(\vec x_1, \cdots, \vec x_N)$$

und damit

$$\begin{aligned}
H \;&=\; \sum_{i=1}^{N} \vec p_i\, \dot{\vec x}_i \;-\; L \\
&=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{\vec p_i^{\,2}}{m_i} \;-\; \Big\{ \sum_{i=1}^{N} \tfrac{\vec p_i^{\,2}}{2m_i} \;-\; V(\vec x_1, \cdots, \vec x_N) \Big\} \\
&=\; \sum_{i=1}^{N} \tfrac{\vec p_i^{\,2}}{2m_i} \;+\; V(\vec x_1, \cdots, \vec x_N)
\end{aligned} \tag{23}$$

Die Hamiltonschen Gleichungen lauten dann also

$$\dot{\vec{x}}_i = \nabla_{\vec{p}_i} H = \frac{\vec{p}_i}{m_i} \tag{24}$$

$$\dot{\vec{p}}_i = -\nabla_{\vec{x}_i} H = -\nabla_{\vec{x}_i} V \tag{25}$$

und sind offensichtlich äquivalent zur Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i + \nabla_{\vec{x}_i} V = 0 \tag{26}$$

Beispiel 2) Wir hatten

$$L = T - V = T = \frac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\} \tag{27}$$

mit den verallgemeinerten Impulsen

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r} \tag{28}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\,r^2\,\dot{\varphi} \tag{29}$$

Also,

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}$$

$$L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{mr^2}{2}\frac{p_\varphi^2}{m^2r^4} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$$

und wir bekommen die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= p_r\,\dot{r} + p_\varphi\,\dot{\varphi} - L \\ &= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} - \left\{ \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \right\} \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \end{aligned} \tag{30}$$

mit den Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \tag{31}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} \tag{32}$$

und

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{p_\varphi^2}{mr^3} \tag{33}$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \tag{34}$$

Die ersten beiden Gleichungen (31) und (32) sind äquivalent zu den Definitionen der verallgemeinerten Impulse (28) und (29) und die letzten beiden Gleichungen (33) und (34) sollten dann äquivalent zu den Bewegungsgleichungen sein. Die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten hatten wir ebenfalls auf dem Übungsblatt 3 hergeleitet, sie lauteten

$$\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 = 0 \tag{35}$$

$$2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} = 0 \tag{36}$$

wobei wir die letzte Gleichung auch schreiben konnten als

$$\tfrac{d}{dt}\big\{\, r^2\,\dot\varphi\,\big\} \;=\; 0 \tag{37}$$

Gleichung (34) ist offensichtlich äquivalent zu (37) und aus Gleichung (33) erhalten wir

$$m\,\ddot r \;=\; \tfrac{p_\varphi^2}{mr^3} \;=\; \tfrac{(mr^2\dot\varphi)^2}{mr^3} \;=\; mr\dot\varphi^2 \tag{38}$$

und das ist offensichtlich äquivalent zu (35). ■

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch die Tatsache, dass H typischerweise durch die Gesamtenergie eines mechanischen Systems gegeben ist, in einem Satz zusammenfassen. Der Beweis dazu ist sehr kompakt und den machen wir auf dem neuen Übungsblatt.

Theorem 3.1.3: Es sei $L = T - V$ die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems und die kinetische Energie T und die potentielle Energie V seien von der Form[2]

$$T \;=\; T(q,\dot q) \;=\; \sum_{j,k=1}^{f} \dot q_j \dot q_k\, t_{jk}(q) \tag{39}$$

mit $t_{jk}(q) = t_{kj}(q)$ und die potentielle Energie hänge nur von den q's ab, aber nicht von den $\dot q$. Also

$$V \;=\; V(q) \;=\; V(q_1,\cdots,q_f) \tag{40}$$

Dann gilt: Die Hamilton-Funktion H ist gegeben durch die Gesamtenergie, es ist

$$H \;=\; T + V\,. \tag{41}$$

[2]auf diese Form waren wir in dem `week5.pdf` in Gleichung (20) gekommen