Hochschule RheinMain — WS 2025/26
Prof. Dr. D. Lehmann

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Eine Perle der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, -mg)$ reibungsfrei auf einem Draht in der (x, z)-Ebene. Der Draht werde durch eine Funktion $z = f(x)$ beschrieben und verbinde die Punkte $P_1 = (0, h)$ und $P_2 = (\ell, 0)$. Wir haben also ein Problem mit einem Freiheitsgrad und wir wählen x als die verallgemeinerte Koordinate.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L = L(x, \dot{x})$ an.

b) Zeigen Sie, dass sich die Bewegungsgleichung[1] auf die folgende Form bringen lässt:

$$\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} \;+\; f'(x)f''(x)\,\dot{x}^2 \;+\; g\,f'(x) \;=\; 0\,. \tag{1}$$

c) Nach dem Theorem 2.5.2 aus der Vorlesung ist die Funktion

$$H(x, \dot{x}) \;:=\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\dot{x} \;-\; L(x, \dot{x}) \tag{2}$$

eine Konstante der Bewegung, es gilt $\frac{d}{dt}H(x_t, \dot{x}_t) \;=\; 0$. Zeigen Sie: Für alle Zeiten $t \geq 0$ gilt

$$H(x_t, \dot{x}_t) \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x_t)^2\right\}\dot{x}_t^2 \;+\; mgf(x_t) \;=\; mg\,h \tag{3}$$

wenn wir die Perle mit Geschwindigkeit 0 bei $P_1 = (x_0, z_0) = (0, h)$ starten lassen. Zeigen Sie weiterhin: Aus Gleichung (3) folgt

$$\dot{x} \;=\; \sqrt{2g}\,\sqrt{\tfrac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}\,. \tag{4}$$

d) Wir substituieren jetzt $f(x) \to q(x)$ durch

$$q(x) \;:=\; h \;-\; f(x)\,, \qquad q'(x) \;=\; -f'(x)\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (4): Die Zeit T, die benötigt wird, um zum Endpunkt $P_2 = (0, \ell)$ zu gelangen, ist gegeben durch

$$T \;=\; T(q) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\ell}\sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\,dx \tag{5}$$

Das Brachistochronen-Problem besteht nun darin, dasjenige $q = q(x)$ zu finden, also die genaue Form des Drahtes so zu bestimmen, so dass die Durchlaufzeit $T = T(q)$ aus Gleichung (5) minimiert wird. Das schauen wir uns dann nächste Woche in der Vorlesung an.

..bitte wenden

[1] die werden wir dann aber gar nicht weiter benutzen, sondern wir benutzen die Gleichung (4) weiter unten

2.Aufgabe: Überprüfen Sie die Formel (5) aus Aufgabe 1 für den Fall einer schiefen Ebene. Berechnen Sie dazu die Zeit T elementar mit Hilfe von Kraft ist Masse mal Beschleunigung und zeigen Sie dann, dass der Ausdruck (5) dasselbe Resultat liefert.