6. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Die folgende Aussage werden wir in dem `week7.pdf` nächste Woche zur Lösung des linearisierten Doppelpendels benutzen: Es sei A eine beliebige reelle oder komplexe $n \times n$ Matrix und Ω sei eine $n \times n$ Matrix mit

$$\Omega^2 \;=\; A$$

Weiter bezeichne Id die $n \times n$ Einheitsmatrix. Dann gilt[1]

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei die $n \times n$ Matrizen $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind. Gehen Sie zum Beweis etwa folgendermassen vor:

a) Erinnern Sie sich an die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen e^x, $\cos x$ und $\sin x$.

b) Berechnen Sie die Potenzen (die 0 steht hier für eine $n \times n$ Matrix mit lauter Nullen)

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^j$$

Unterscheiden Sie dazu die Fälle $j = 2k$ und $j = 2k + 1$.

c) Schreiben Sie die Potenzreihenentwicklung von

$$\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

hin und zerlegen Sie die Summe in zwei Teilsummen, eine Teilsumme mit den geraden Potenzen und die andere Teilsumme mit den ungeraden Potenzen.

2.Aufgabe: Beweisen Sie die folgende Identität für 2×2 Matrizen: Es gilt

$$\begin{aligned} \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} \;&=\; e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos\omega t + \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\varepsilon^2\,\frac{\sin\omega t}{\omega} & \cos\omega t - \frac{\mu}{\omega}\sin\omega t \end{pmatrix} \\ &=\; e^{-\mu t}\left[\cos\omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{2}$$

mit $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$. Für $\mu = 0$ ist (2) offensichtlich ein Spezialfall von (1).

[1] es sei also vorausgesetzt, dass Ω^{-1} existiert