Hochschule RheinMain | WS 2025/26
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir betrachten die Bewegung eines kleinen Kügelchens der Masse m auf einem Kegel K unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Der Kegel habe die Parametrisierung

$$K \;=\; \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} \;=\; \vec{x}(r,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ c\,r \end{pmatrix},\;\; (r,\varphi) \in [0,R] \times [0,2\pi) \right\}$$

wobei c eine positive Konstante ist.

a) Wählen Sie (r,φ) als verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion an.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen[1] für r und φ her.

2.Aufgabe: Wir betrachten das Doppelpendel so wie es in Beispiel 2 in `week5.pdf` spezifiziert ist. Schauen Sie sich dazu insbesondere noch einmal die Abbildung auf Seite 3 an. Wählen Sie dann φ_1 und φ_2 als die verallgemeinerten Koordinaten.

a) Geben Sie die Zwangskräfte $\vec{Z}_1$ und $\vec{Z}_2$ als Funktion von (x_1, y_1, x_2, y_2) und der Parameter $\lambda_1 = \lambda_1(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$ und $\lambda_2 = \lambda_2(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})$ an. Benutzen Sie dazu die Formeln (15) und (16) aus dem `week5.pdf`.

b) Geben Sie die expliziten Formeln

$$\vec{x}_1 \;=\; \begin{pmatrix} x_1(\varphi_1,\varphi_2) \\ y_1(\varphi_1,\varphi_2) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 \;=\; \begin{pmatrix} x_2(\varphi_1,\varphi_2) \\ y_2(\varphi_1,\varphi_2) \end{pmatrix}$$

für die Parametrisierung durch die verallgemeinerten Koordinaten (φ_1, φ_2) an und berechnen Sie die Grössen

$$\tfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1}, \quad \tfrac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1}, \quad \tfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2}, \quad \tfrac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2}.$$

Drücken Sie das Resultat für diese Ableitungen dann wieder durch die (x_i, y_i) aus, nicht durch die φ_i, es wird dann in Teil (c) ein bischen übersichtlicher.

c) Zeigen Sie jetzt: Es gilt mit $\vec{Z} = (\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$ und $\vec{x} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

$$\begin{aligned} \vec{Z} \cdot \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_1} \;&=\; \vec{Z}_1 \cdot \tfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} \;+\; \vec{Z}_2 \cdot \tfrac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1} \;=\; 0 \\ \vec{Z} \cdot \tfrac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_2} \;&=\; \vec{Z}_1 \cdot \tfrac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2} \;+\; \vec{Z}_2 \cdot \tfrac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2} \;=\; 0 \end{aligned}$$

aber die individuellen Skalarprodukte $\vec{Z}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \varphi_j}$ müssen nicht notwendig null sein.

[1] 'die Bewegungsgleichungen' meint dasselbe wie 'die Euler-Lagrange-Gleichungen'