

13. Übungsblatt zur Vorlesung Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Wir betrachten ein punktförmiges Teilchen mit Masse m , welches sich unter dem Einfluss eines Potentials $V = V(x)$ im $\mathbb{R}^3$ bewegt, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Quantenmechanisch wird das Teilchen durch eine komplexwertige, quadratintegrale Wellenfunktion $\psi = \psi_t(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ beschrieben, welche eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung sein muss,

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_t(x) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x) \right\} \psi_t(x) \quad (1)$$

Wir machen den Ansatz

$$\psi_t(x) = |\psi_t(x)| \cdot e^{i \arg[\psi_t(x)]} =: a(x, t) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \varphi(x, t)} \quad (2)$$

mit einer positiven, reellen Amplitude

$$a(x, t) := |\psi_t(x)| \quad (3)$$

und einem reellen, differenzierbaren (d.h. nicht notwendig in $[0, 2\pi\hbar)$ liegenden) Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$.

a) Beweisen Sie die folgende Rechenregel: Für beliebige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\Delta(f \cdot g) = \Delta f \cdot g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \Delta g \quad (4)$$

b) Zeigen Sie, dass die komplexe Schrödinger-Gleichung (1) äquivalent ist zu den folgenden beiden reellen Gleichungen für a und φ :

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} |\nabla \varphi|^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a} \quad (5)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla a \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{2m} a \cdot \Delta \varphi \quad (6)$$

c) Zeigen Sie, dass die Gleichung (6) äquivalent ist zur Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \cdot \frac{\nabla \varphi}{m} \right) = 0 \quad (7)$$

für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x, t) := a^2(x, t) = |\psi_t(x)|^2 \quad (8)$$

d) Im Limes $\hbar \rightarrow 0$ reduziert sich die Gleichung (5) auf

$$H(x, \nabla\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

mit der klassischen Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (10)$$

Wodurch sind nun Lösungen der Gleichung (9) gegeben? Erinnern Sie sich dazu an die Hamilton-Jacobi Gleichung.

e) Zeigen Sie, dass für die Lösungen $\varphi = \varphi(x, t)$ von (9) aus dem Teil (d) die Grösse $\nabla\varphi/m$ die Bedeutung einer klassischen Geschwindigkeit $v = p/m$ hat, die Kontinuitätsgleichung (7) liest sich dann also folgendermassen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0 \quad .$$