Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2025/26

Lösungen zum 8. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 - mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - mg\,z \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} z &= f(x) \\ z_t &= f(x_t) \\ \dot{z}_t &= f'(x_t)\,\dot{x}_t \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} L(x,\dot{x}) &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right\} - mg\,z \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{\dot{x}^2 + f'(x)^2\,\dot{x}^2\right\} - mg\,f(x) \\ &= \tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x}^2 - mg\,f(x) \qquad (1) \end{aligned}$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\dot{x} \qquad (3) \\ \tfrac{d}{dt}\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + m\,2\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}\,\dot{x} \\ &= m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + 2m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 \qquad (4) \end{aligned}$$

und

$$\tfrac{\partial L}{\partial x} = m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - mg\,f'(x)$$

Wenn wir das in (2) einsetzen, bekommen wir also

$$m\left\{1 + f'(x)^2\right\}\ddot{x} + 2m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - \left\{m\,f'(x)\,f''(x)\,\dot{x}^2 - mg\,f'(x)\right\} = 0$$

oder

$$\left\{1 \,+\, f'(x)^2\right\} \ddot{x} \;+\; f'(x)\, f''(x)\, \dot{x}^2 \;+\; g\, f'(x) \;=\; 0 \tag{5}$$

c) Mit Gleichung (3) bekommen wir

$$\tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \dot{x} \;=\; m\left\{1 \,+\, f'(x)^2\right\} \dot{x}^2$$

und damit

$$\begin{aligned} H(x,\dot{x}) \;&:=\; \tfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \dot{x} \;-\; L(x,\dot{x}) \\ &=\; m\left\{1 \,+\, f'(x)^2\right\} \dot{x}^2 \;-\; \left\{ \tfrac{m}{2}\left\{1 \,+\, f'(x)^2\right\} \dot{x}^2 \;-\; mg\, f(x) \right\} \\ &=\; \tfrac{m}{2}\left\{1 \,+\, f'(x)^2\right\} \dot{x}^2 \;+\; mg\, f(x) \end{aligned} \tag{6}$$

Dies ist eine Konstante der Bewegung, wegen $(x_0, \dot{x}_0) = (0,0)$ und

$$f(x_0) \;=\; f(0) \;=\; h$$

bekommen wir dann also

$$H(x_t, \dot{x}_t) \;=\; H(x_0, \dot{x}_0) \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{1 \,+\, f'(0)^2\right\} 0^2 \;+\; mg\, f(0) \;=\; mg\, h$$

oder

$$\tfrac{m}{2}\left\{1 + f'(x_t)^2\right\} \dot{x}_t^2 \;+\; mgf(x_t) \;=\; mg\, h \tag{7}$$

Wir können das etwas umstellen und durch m teilen,

$$\left\{1 + f'(x_t)^2\right\} \dot{x}_t^2 \;=\; 2g[h - f(x)]$$

und bekommen

$$\dot{x} \;=\; \sqrt{2g}\, \sqrt{\tfrac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}\;. \tag{8}$$

d) Wegen $\dot{x} = dx/dt$ folgt aus Gleichung (8)

$$dt \;=\; \frac{dx}{\sqrt{2g}\, \sqrt{\frac{h - f(x)}{1 + f'(x)^2}}} \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\tfrac{1+f'(x)^2}{h - f(x)}}\, dx \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\, dx$$

und damit erhalten wir für die Durchlaufzeit T mit $x_0 = 0$ und $x_T = \ell$:

$$T \;=\; \int_0^T dt \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_T} \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\, dx \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\ell} \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\, dx\;. \tag{9}$$

2.Aufgabe: Eine Gerade zwischen den Punkten $(0,h)$ und $(\ell, 0)$ ist gegeben durch die Gleichung

$$z \;=\; f(x) \;=\; h - \frac{h}{\ell}\, x$$

Die Schwerkraft mg wirkt in Richtung der negativen z-Achse und die Komponente F_{tang} tangential an die schiefe Ebene, das ist die Komponente, die die Beschleunigung verursacht, ist gegeben durch

$$\frac{F_{\text{tang}}}{mg} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\ell^2}} \ ,$$

das ist beides gleich dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene. Bezeichnen wir den auf der schiefen Ebene zurückgelegten Weg des Teilchens mit $s(t)$, dann gilt also

$$m\ddot{s}(t) = F_{\text{tang}} = \frac{h}{\sqrt{h^2+\ell^2}}\, mg$$

oder

$$\ddot{s}(t) = \frac{hg}{\sqrt{h^2+\ell^2}}$$

Mit

$$s(0) = \dot{s}(0) = 0$$

folgt daraus

$$s(t) = \frac{hg\,t^2}{2\sqrt{h^2+\ell^2}}$$

Die Strecke, die bis zum Endpunkt $(0,\ell)$ zurückgelegt werden muss, ist

$$s(T) = \sqrt{h^2+\ell^2}$$

Also bekommen wir

$$\frac{hg\,T^2}{2\sqrt{h^2+\ell^2}} = \sqrt{h^2+\ell^2}$$

oder

$$T = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{\frac{h^2+\ell^2}{h}}$$

Die Formel aus Aufgabe 1d liefert mit

$$\begin{aligned} q(x) &= h - f(x) = \frac{h}{\ell}\,x \\ q'(x) &= \frac{h}{\ell} \end{aligned}$$

die Zeit

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\tfrac{1+q'(x)^2}{q(x)}}\, dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^\ell \sqrt{\tfrac{1+h^2/\ell^2}{\frac{h}{\ell}\,x}}\, dx \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \sqrt{\tfrac{\ell^2+h^2}{h\,y}}\, dy \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\tfrac{\ell^2+h^2}{h}}\ 2\sqrt{y}\,\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{2}{g}}\,\sqrt{\frac{h^2+\ell^2}{h}} \end{aligned}$$

und das stimmt mit dem Ergebnis von weiter oben überein.