

Lösungen zum 7. Übungsblatt Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Es bezeichne Id die Einheitsmatrix mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen und sonst Nullen. Dann gilt

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = Id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \frac{d}{dt} \left\{ Id + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^n}{n!} A^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n t^{n-1}}{n!} A^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A A^{n-1} \\ &= A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^{n-1} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} \\ &= A e^{tA}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe: a) Für $m_1 = 0$ erhalten wir das System

$$\ell_1 \ddot{\varphi}_1 + \ell_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_1 = 0 \quad (1)$$

$$\ell_1 \dot{\varphi}_1 + \ell_2 \dot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0 \quad (2)$$

Subtrahieren wir etwa (2) von (1) bekommen wir

$$g \varphi_1 - g \varphi_2 = 0$$

oder

$$\varphi_{1,t} = \varphi_{2,t} \quad (3)$$

für alle $t \geq 0$. Damit haben wir auch

$$\ddot{\varphi}_{1,t} = \ddot{\varphi}_{2,t}$$

und wenn wir das in (2) einsetzen, bekommen wir

$$(\ell_1 + \ell_2) \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0 \quad (4)$$

also ein harmonisches Fadenpendel mit Pendellänge $\ell_1 + \ell_2$ und Kreisfrequenz

$$\omega_0^2 = \frac{g}{\ell_1 + \ell_2} \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung haben wir bereits in Aufgabe 2b vom Übungsblatt 4 bestimmt, sie lautet

$$\varphi_2(t) = \varphi_{2,0} \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_{2,0}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) . \quad (6)$$

b) Für den Fall

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m \\ \ell_1 &= \ell_2 = \ell \end{aligned}$$

bekommen wir das System

$$T \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_{1,t} \\ \ddot{\varphi}_{2,t} \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen

$$T = \begin{pmatrix} 2\ell & \ell \\ \ell & \ell \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$V = \begin{pmatrix} 2g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Es ist

$$T^{-1} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und für die Matrix A erhalten wir

$$A = T^{-1}V = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2 \stackrel{!}{=} 0$$

und wir bekommen

$$\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{4 - 2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Die Eigenvektoren sind gegeben durch

$$\vec{b}_+ = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_- = \begin{pmatrix} +1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und wir fassen sie wieder in der Matrix B zusammen,

$$B = (\vec{b}_+ \vec{b}_-) = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Wir haben dann

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} B^{-1}$$

oder

$$A = \frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{g}{\ell} B \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} B^{-1} =: B \begin{pmatrix} \omega_+^2 & 0 \\ 0 & \omega_-^2 \end{pmatrix} B^{-1} \quad (10)$$

mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_{\pm} := \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}. \quad (11)$$

Das Ω bekommen wir wie in der Vorlesung,

$$\begin{aligned} A &= B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \Omega^2 \end{aligned}$$

also

$$\Omega = B \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix} B^{-1}. \quad (12)$$

Die allgemeine Lösung hatten wir in `week7.pdf` angegeben, sie lautete

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{pmatrix} + \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{1,0} \\ \dot{\varphi}_{2,0} \end{pmatrix} \quad (13)$$

mit dem Matrizen

$$\cos(\Omega t) = B \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \quad (14)$$

$$\sin(\Omega t) = B \begin{pmatrix} \sin(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \sin(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \quad (15)$$

Das B ist in Gleichung (9) explizit gegeben, wir geben noch das B^{-1} an:

$$B^{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Die Matrix-Produkte berechnen wir dann in Teil (c).

c) Nach Voraussetzung ist $\dot{\varphi}_{1,0} = \dot{\varphi}_{2,0} = 0$, also ergibt sich aus der Gleichung (13)

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi_{2,0} \end{pmatrix} = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \pi/36 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

mit der Matrix

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t) &= B \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_+ t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega_- t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da wir das Resultat mit dem Vektor $(\pi/36, 0)$ multiplizieren müssen, brauchen wir nur die erste Spalte, also

$$\begin{aligned}\cos(\Omega t) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\sqrt{2} \cos(\omega_+ t) & -\cos(\omega_+ t) \\ -\sqrt{2} \cos(\omega_- t) & -\cos(\omega_- t) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] & * \\ 2[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] & * \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir bekommen dann

$$\begin{pmatrix} \varphi_{1,t} \\ \varphi_{2,t} \end{pmatrix} = \cos(\Omega t) \begin{pmatrix} \pi/36 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] \\ 2[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] \end{pmatrix} \frac{\pi}{36}$$

oder

$$\varphi_{1,t} = \frac{\pi}{72} [\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] \quad (18)$$

$$\varphi_{2,t} = -\sqrt{2} \frac{\pi}{72} [\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] \quad (19)$$

mit den Frequenzen

$$\omega_{\pm} = 2\pi \nu_{\pm} = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \sqrt{9.81} \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \text{ sec}^{-1}$$

und den folgenden numerischen Werten:

$$\begin{aligned}\omega_+ &= 5.79 \text{ s}^{-1} \\ \omega_- &= 2.40 \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_+ &= 0.92 \text{ s}^{-1} \\ \nu_- &= 0.38 \text{ s}^{-1}.\end{aligned}$$

Die Lösungen (18) und (19) sind in dem Excel-Sheet `Loesung7-Aufg2c.xlsx` geplottet.