Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2025/26

Lösungen zum 6. Übungsblatt
Dynamik der Teilchen und Felder

1.Aufgabe: Wir haben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}^{k} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $A = \Omega^2$ können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} &= (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{2k} \\ -\Omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Damit bekommen wir also

$$\begin{aligned} \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\ &\overset{(1,2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit den Potenzreihenentwicklungen

$$
\begin{aligned}
\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}
$$

bekommen wir dann

$$
\begin{aligned}
\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t)\,\Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t)\,\Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■

2.Aufgabe: Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
\exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} &= \exp\left\{ t \begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&= \exp\left\{ -\mu\, t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&= \exp\left\{ -\mu\, t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \times \exp\left\{ t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&= e^{-\mu t} \times \exp\left\{ t \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

Weiterhin bekommen wir mit

$$
A := \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix}
$$

die folgenden Potenzen:

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu^2 - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 - \varepsilon^2 \end{pmatrix} = -\omega^2\, Id
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
A^{2k} &= (-1)^k\, \omega^{2k}\, Id \\
A^{2k+1} &= (-1)^k\, \omega^{2k}\, A = (-1)^k\, \omega^{2k+1}\, \frac{A}{\omega}
\end{aligned}
$$

Also,

$$\begin{aligned}
e^{tA} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^{2k}}{(2k)!} \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t\omega)^{2k}}{(2k)!}\;Id \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!}\;\frac{A}{\omega} \\
&=\; \cos(\omega t)\;Id \;+\; \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\;A \\
&=\; \cos\omega t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \;+\; \frac{\sin\omega t}{\omega}\begin{pmatrix}+\mu & +1\\ -\varepsilon^2 & -\mu\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■