

**Lösungen zum 5. Übungsblatt  
Dynamik der Teilchen und Felder**

**1. Aufgabe:** a) Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 L &= \text{kinetische Energie} - \text{potentielle Energie} \\
 &= T - V \\
 &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - mg z
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wir müssen  $L$  durch die verallgemeinerten Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  ausdrücken. Das heisst also, wir müssen die Größen  $\dot{\vec{x}}^2$  und  $z$  durch die Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  ausdrücken. Bei  $z$  geht das sehr schnell, das Kugelchen muss sich ja auf dem Kegel befinden, und auf dem Kegel ist ja

$$z = x_3(r, \varphi) = cr \tag{2}$$

Um  $\dot{\vec{x}}^2$  zu berechnen, schreiben wir

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ cr \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ c \end{pmatrix} =: r \vec{v}$$

mit

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ c \end{pmatrix}$$

Wir schreiben hier  $\vec{v}$  und nicht  $\vec{e}$ , weil das  $\vec{v}$  nicht normiert ist, es ist  $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + c^2}$  und nicht wie bei den  $\vec{e}$ 's  $\|\vec{e}\| = 1$ . Es gilt dann

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

mit

$$\vec{e}_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + c \cdot 0 = 0$$

Wir bekommen dann

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \dot{r} \vec{v} + r \dot{\vec{v}} \\ &= \dot{r} \vec{v} + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}^2 &= \dot{r}^2 \vec{v}^2 + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \vec{v} \cdot \vec{e}_\varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\varphi^2 \\ &= \dot{r}^2 (1 + c^2) + 0 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cdot 1 \\ &= \dot{r}^2 (1 + c^2) + r^2 \dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

Also erhalten wir für die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - mgz \\ &= \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 (1 + c^2) + r^2 \dot{\varphi}^2 \} - mgcr\end{aligned}$$

**b)** Die Lagrange-Funktion lautet nach Teil (a):

$$L = L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} \{ \dot{r}^2 (1 + c^2) + r^2 \dot{\varphi}^2 \} - mgcr \quad (3)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (5)$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\dot{\varphi}^2 - mgc \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}(1 + c^2) \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2\dot{\varphi}\end{aligned}$$

Damit ist Gleichung (4) äquivalent zu

$$m\ddot{r}(1 + c^2) - mr\dot{\varphi}^2 + mgc = 0 \quad (6)$$

und Gleichung (5) ist äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \{ mr^2\dot{\varphi} \} = m \{ 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} \} = 0 \quad (7)$$

Wenn wir Gleichung (6) durch  $m$  und Gleichung (7) durch  $mr$  dividieren, erhalten wir damit das System

$$(1 + c^2)\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + gc = 0 \quad (8)$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \quad (9)$$

Das sind dann also die Bewegungsgleichungen des Systems. Dabei ist die Gleichung (7) vielleicht etwas informativer als die Gleichung (9), es folgt aus beiden Gleichungen

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{constant}, \quad (10)$$

das ist bei Gleichung (9) aber nicht mehr sofort offensichtlich.

**2.Aufgabe:** a) Die Nebenbedingungen für das Doppelpendel lauten:

$$g_1(x_1, y_1, x_2, y_2) := x_1^2 + y_1^2 - \ell_1^2 = 0 \quad (11)$$

$$g_2(x_1, y_1, x_2, y_2) := (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell_2^2 = 0 \quad (12)$$

Die Zwangskräfte sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{Z}_i &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla_{\vec{x}_i} g_k \\ &\stackrel{\text{hier}}{=} \lambda_1 \nabla_{\vec{x}_1} g_1 + \lambda_2 \nabla_{\vec{x}_2} g_2 \end{aligned} \quad (13)$$

Also,

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \nabla_{\vec{x}_1} g_1 + \lambda_2 \nabla_{\vec{x}_1} g_2 \quad (14)$$

$$\vec{Z}_2 = \lambda_1 \nabla_{\vec{x}_2} g_1 + \lambda_2 \nabla_{\vec{x}_2} g_2 \quad (15)$$

oder konkret

$$\vec{Z}_1 = 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\vec{Z}_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

b) Wir haben

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_1(\varphi_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \ell_1 \begin{pmatrix} \sin \varphi_1 \\ -\cos \varphi_1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_2(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{x}_1(\varphi_1) + \ell_2 \begin{pmatrix} \sin \varphi_2 \\ -\cos \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

und damit

$$\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} = \ell_1 \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2} = \ell_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

c) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
\vec{Z} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_1} &= \vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} + \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1} \\
&= \left\{ 2\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
&= -2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{24}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{Z} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi_2} &= \vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_2} + \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_2} \\
&= \vec{Z}_1 \cdot \vec{0} + 2\lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{25}$$

aber, wie man in Gleichung (24) sieht, tun die individuellen Skalarprodukte

$$\vec{Z}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial \varphi_1} \quad \text{und} \quad \vec{Z}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial \varphi_1}$$

nicht jeweils für sich verschwinden.