

Lösungen zum 13. Übungsblatt Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: a) Wir haben

$$\Delta(f \cdot g) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (f \cdot g)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (f \cdot g) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \cdot g + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \cdot g + 2 \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + f \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x_k^2} \right) \\ &= \Delta f \cdot g + 2 \nabla f \cdot \nabla g + f \cdot \Delta g \end{aligned}$$

b) Mit dem Ansatz

$$\psi_t(x) = a(x, t) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \varphi(x, t)}$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} i \hbar \left(\frac{\partial a}{\partial t} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} + a \cdot \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \right) &= \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \Delta a \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} + 2 \nabla a \cdot \nabla e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} + a \cdot \Delta e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \right\} &+ V a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \left(i \hbar \frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} &= \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \Delta a \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} + \frac{2i}{\hbar} (\nabla a \cdot \nabla \varphi) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} + a \cdot \Delta e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \right\} &+ V a e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \right) = \left(\frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)^2 \right) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} \\ \Delta e^{\frac{i}{\hbar} \varphi} &= \left(\frac{i}{\hbar} \Delta \varphi - \frac{1}{\hbar^2} |\nabla \varphi|^2 \right) e^{\frac{i}{\hbar} \varphi}\end{aligned}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}i \hbar \frac{\partial a}{\partial t} - a \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \Delta a + \frac{2i}{\hbar} \nabla a \cdot \nabla \varphi + a \cdot \left(\frac{i}{\hbar} \Delta \varphi - \frac{1}{\hbar^2} |\nabla \varphi|^2 \right) \right\} + V a \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta a - \frac{i \hbar}{m} \nabla a \cdot \nabla \varphi - \frac{i \hbar}{2m} a \cdot \Delta \varphi + \frac{1}{2m} a \cdot |\nabla \varphi|^2 + V a\end{aligned}$$

Wir nehmen den Real- und Imaginärteil davon und bekommen so zwei reelle Gleichungen. Für den Imaginärteil,

$$\hbar \frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla a \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{2m} a \cdot \Delta \varphi \quad (1)$$

Und für den Realteil,

$$-a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta a + \frac{1}{2m} a \cdot |\nabla \varphi|^2 + V a \quad (2)$$

Bei der Gleichung (1) können wir direkt das $\hbar$ rausdividieren,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{m} \nabla a \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{2m} a \cdot \Delta \varphi \quad (3)$$

und erhalten so die Gleichung (6) vom ÜBlatt. Die Gleichung (2) können wir noch durch das a teilen und erhalten dann die Gleichung (5) vom ÜBlatt,

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} |\nabla \varphi|^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta a}{a} \quad (4)$$

c) Anstatt für die Amplitude a wollen wir eine Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(x, t) = |\psi_t(x)|^2 = a^2(x, t) \quad (5)$$

herleiten. Wir bekommen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= 2 a \frac{\partial a}{\partial t} \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{2}{m} a \nabla a \cdot \nabla \varphi - \frac{1}{m} a^2 \cdot \Delta \varphi \\ &= -\operatorname{div} \left(a^2 \cdot \frac{\nabla \varphi}{m} \right)\end{aligned}$$

Also mit $a^2 = \rho$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \cdot \frac{\nabla \varphi}{m}\right) = 0 \quad (6)$$

d,e) Bei der Gleichung (4) sind alle Terme bis auf der letzte auf der rechten Seite unabhängig von $\hbar$. Im Limes $\hbar \rightarrow 0$ sieht (4) also folgendermassen aus:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} |\nabla \varphi|^2 + V \quad (7)$$

Mit der klassischen Hamilton-Funktion

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3)$$

können wir (7) dann auch so schreiben,

$$H(x, \nabla \varphi) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

und das ist genau die Hamilton-Jacobi-Gleichung, die wir in dem week12.pdf für die klassische Wirkung

$$S(x_0, x_t, t) = \int_0^t L(x_s, \dot{x}_s) ds$$

hergeleitet hatten. Lösungen von (7) sind also durch

$$\varphi(x, t) = S(x_0, x, t)$$

gegeben. Und in dem Theorem 3.3.1 in dem week12 hatten wir ebenfalls bewiesen, dass die Beziehung

$$\nabla_{x_t} S(x_0, x_t, t) = p_t$$

gilt. Hier haben wir kartesische Koordinaten $q_t = x_t$ so dass die verallgemeinerten Impulse $p_t = \partial L / \partial \dot{q}_t$ identisch sind mit den linearen Impulsen $mv_t = m\dot{x}_t$, also

$$\frac{\nabla \varphi}{m} = \frac{\nabla S}{m} = \frac{p}{m} = v \quad (9)$$

und die Gleichung (6) liest sich dann folgendermassen,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \quad .$$