

Lösungen zum 12. Übungsblatt Dynamik der Teilchen und Felder

1. Aufgabe: Aus der Lagrange-Funktion

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \{ \dot{x}^2 - \omega^2 x^2 \}$$

erhalten wir

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x$$

Damit bekommen wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}_t + \omega^2 x_t = 0$$

Die allgemeine Lösung davon ist

$$x_t = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

mit der Geschwindigkeit

$$\dot{x}_t = \omega \left\{ -x_0 \sin \omega t + \frac{v_0}{\omega} \cos \omega t \right\}$$

und $v_0 = \dot{x}_{t=0}$. Wenn wir das in die Lagrange-Funktion einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} L(x_t, \dot{x}_t) &= \frac{m}{2} \{ \dot{x}_t^2 - \omega^2 x_t^2 \} \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left\{ \left[-x_0 \sin(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) \right]^2 - \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \right]^2 \right\} \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left\{ x_0^2 [\sin^2(\omega t) - \cos^2(\omega t)] + \frac{v_0^2}{\omega^2} [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)] - 4 \frac{x_0 v_0}{\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right\} \\ &= \frac{m\omega^2}{2} \left\{ -x_0^2 \cos(2\omega t) + \frac{v_0^2}{\omega^2} \cos(2\omega t) - 2 \frac{x_0 v_0}{\omega} \sin(2\omega t) \right\} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(x_0, v_0, t) &= \int_0^t L(x_s, \dot{x}_s) ds \\
&= \int_0^t \frac{m\omega^2}{2} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right] \cos(2\omega s) - 2 \frac{x_0 v_0}{\omega} \sin(2\omega s) \right\} ds \\
&= \frac{m\omega^2}{2} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right] \frac{\sin(2\omega s)}{2\omega} + 2 \frac{x_0 v_0}{\omega} \frac{\cos(2\omega s)}{2\omega} \right\} \Big|_0^t
\end{aligned}$$

oder

$$\tilde{S}(x_0, v_0, t) = \frac{m\omega}{4} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \right] \sin(2\omega t) + 2 \frac{x_0 v_0}{\omega} [\cos(2\omega t) - 1] \right\}$$

Wir müssen das v_0 eliminieren: es ist

$$x_t = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Also,

$$\frac{\omega}{\sin \omega t} [x_t - x_0 \cos(\omega t)] = v_0 = v_0(x_0, x_t, t)$$

Damit bekommen wir die Wirkung

$$\begin{aligned}
S(x_0, x_t, t)/m &= \tilde{S}(x_0, v_0(x_0, x_t, t), t)/m \\
&= \frac{\omega}{4} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{(x_t - x_0 \cos \omega t)^2}{\sin^2 \omega t} \right] \sin(2\omega t) + 2x_0 \frac{x_t - x_0 \cos \omega t}{\sin \omega t} [\cos(2\omega t) - 1] \right\} \\
&= \frac{\omega}{4} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{(x_t - x_0 \cos \omega t)^2}{\sin^2 \omega t} \right] 2 \sin \omega t \cos \omega t + 2x_0 \frac{x_t - x_0 \cos \omega t}{\sin \omega t} (-2) \sin^2 \omega t \right\} \\
&= \frac{\omega \sin \omega t}{2} \left\{ \left[-x_0^2 + \frac{(x_t - x_0 \cos \omega t)^2}{\sin^2 \omega t} \right] \cos \omega t - 2x_0 (x_t - x_0 \cos \omega t) \right\} \\
&= \frac{\omega \sin \omega t}{2} \left\{ \left[x_0^2 + \frac{(x_t - x_0 \cos \omega t)^2}{\sin^2 \omega t} \right] \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\} \\
&= \frac{\omega \sin \omega t}{2} \left\{ \left[\frac{x_0^2 \sin^2 \omega t + x_t^2 - 2x_0 x_t \cos \omega t + x_0^2 \cos^2 \omega t}{\sin^2 \omega t} \right] \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\} \\
&= \frac{\omega \sin \omega t}{2} \left\{ \frac{x_0^2 + x_t^2 - 2x_0 x_t \cos \omega t}{\sin^2 \omega t} \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\} \\
&= \frac{\omega}{2 \sin \omega t} \left\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos \omega t - 2x_0 x_t \cos^2 \omega t - 2x_0 x_t \sin^2 \omega t \right\} \\
&= \frac{\omega}{2 \sin \omega t} \left\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\}
\end{aligned}$$

Checken wir zunächst die Identität $p_t = \partial S / \partial x_t$. Wir haben

$$\frac{\partial S}{\partial x_t} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega t} \{ 2x_t \cos \omega t - 2x_0 \} = \frac{m\omega}{\sin \omega t} [x_t \cos \omega t - x_0]$$

und es ist

$$\begin{aligned}
p_t &= m\dot{x}_t = m\omega \left\{ -x_0 \sin(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t) \right\} \\
&= m\omega \left\{ -x_0 \sin(\omega t) + \frac{1}{\sin \omega t} [x_t - x_0 \cos(\omega t)] \cos(\omega t) \right\} \\
&= \frac{m\omega}{\sin \omega t} \left\{ -x_0 \sin^2(\omega t) + [x_t - x_0 \cos(\omega t)] \cos(\omega t) \right\} \\
&= \frac{m\omega}{\sin \omega t} \left\{ -x_0 + x_t \cos(\omega t) \right\} = \frac{\partial S}{\partial x_t}
\end{aligned}$$

das passt also. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S/m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\omega}{2 \sin \omega t} \left\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\} \\
&= -\frac{\omega^2 \cos \omega t}{2 \sin^2 \omega t} \left\{ [x_0^2 + x_t^2] \cos \omega t - 2x_0 x_t \right\} - \frac{\omega^2}{2 \sin \omega t} [x_0^2 + x_t^2] \sin \omega t \\
&= -\frac{\omega^2}{2 \sin^2 \omega t} [x_0^2 + x_t^2] \cos^2 \omega t + \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega t} x_0 x_t \cos \omega t - \frac{\omega^2}{2} [x_0^2 + x_t^2] \\
&= -\frac{\omega^2}{2 \sin^2 \omega t} [x_0^2 \cos^2 \omega t + x_t^2] + \frac{\omega^2}{\sin^2 \omega t} x_0 x_t \cos \omega t - \frac{\omega^2}{2} x_0^2 \\
&= -\frac{\omega^2}{2} \left\{ \frac{x_0^2 \cos^2 \omega t + x_t^2 - 2x_0 x_t \cos \omega t}{\sin^2 \omega t} + x_0^2 \right\} \\
&= -\frac{\omega^2}{2} \left\{ \frac{(x_0 \cos \omega t - x_t)^2}{\sin^2 \omega t} + x_0^2 \right\}
\end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{m\omega^2}{2} \left\{ \frac{(x_0 \cos \omega t - x_t)^2}{\sin^2 \omega t} + x_0^2 \right\}$$

Die Hamilton-Funktion ist eine Konstante der Bewegung und ist gegeben durch

$$H(x_t, p_t) = \frac{p_t^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_t^2 = \frac{m}{2} \left\{ \dot{x}_t^2 + \omega^2 x_t^2 \right\} = \frac{m}{2} \left\{ \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2 \right\}$$

Mit

$$\frac{\omega}{\sin \omega t} [x_t - x_0 \cos(\omega t)] = v_0 = v_0(x_0, x_t, t)$$

bekommen wir dann

$$H = \frac{m}{2} \left\{ v_0^2 + \omega^2 x_0^2 \right\} = \frac{m\omega^2}{2 \sin^2 \omega t} [x_t - x_0 \cos(\omega t)]^2 + \frac{m\omega^2}{2} x_0^2$$

also

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

das passt auch.