Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Probe-Klausur zur Vorlesung
Dynamik der Teilchen und Felder

Nachname:							
Vorname:							
Matrikelnummer:						(falls anwendbar) Note:	
Aufgabe:	1	2	3	4			Summe:
Punkte:	15	20	9	6			50
erreicht:							

Zugelassene Hilfsmittel: 1 beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt, eine Formelsammlung und ein einfacher Taschenrechner

Bevor Sie beginnen: Bitte geben Sie Ihre elektronischen Kommunikationsgeräte vorne ab. Wenn während der Klausur etwa ein Mobil-Telefon benutzt wird, muss die Klausur als **nicht bestanden** gewertet werden.

1.Aufgabe (15 Punkte): Wir betrachten die kräftefreie Bewegung eines Teilchens der Masse m in der (x, y)-Ebene und parametrisieren die Bewegung durch Polarkoordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

a) Wählen Sie r und φ als die verallgemeinerte Koordinaten und geben Sie die Lagrange-Funktion L an. Vereinfachen Sie Ihr Resultat soweit wie möglich.

b) Leiten Sie die Euler-Lagrange Gleichungen für r und φ her und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich.

2.Aufgabe (20 Punkte): Wir parametrisieren die Bewegung eines Teilchens der Masse m im $\mathbb{R}^3$ durch Kugelkoordinaten,

$$\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;=\; r \begin{pmatrix} \cos\varphi \, \sin\theta \\ \sin\varphi \, \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Die Lagrange-Funktion für die kräftefreie Bewegung mit $V = 0$ lautet dann

$$L \;=\; \tfrac{m}{2}\,\dot{\vec{x}}^2 \;=\; \tfrac{m}{2}\left\{ \dot{r}^2 \;+\; r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta \;+\; r^2\dot{\theta}^2 \right\}$$

wenn wir $(q, \dot{q}) \;=\; (r, \varphi, \theta, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$ als die verallgemeinerten Koordinaten wählen. Wir wollen jetzt die Bewegung in einem Zentralpotential (z.B. $V(r) = const/r$, Coulomb-Potential)

$$V \;=\; V(r)$$

betrachten.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion an.

b) Stellen Sie die Euler-Lagrange Gleichungen auf.

c) Berechnen Sie die verallgemeinerten Impulse $(p_r, p_\varphi, p_\theta)$.

d) Berechnen Sie die Hamilton-Funktion $H = H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\varphi, p_\theta)$.

e) Stellen Sie die Hamiltonschen Gleichungen auf.

3.Aufgabe (9 Punkte): Wir betrachten die Bewegung eines Teilchens der Masse $m = 1$ in einem 1-dimensionalen Potential V gegeben durch

$$V(x) \;:=\; 1 \;-\; \cos(x) \;\; .$$

Wir wählen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_0 \;&=\; \varepsilon \;\ll\; 1 \\ \dot{x}_0 \;&=\; 0\,. \end{aligned}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion $V(x)$.

b) Für kleine $\varepsilon \ll 1$, etwa $\varepsilon = \frac{1}{10}$, erhält man näherungsweise harmonische Schwingungen als Lösungen der Bewegungsgleichung. Berechnen Sie die Periodendauer T dieser Schwingungen mit Hilfe einer geeigneten Näherung.

4.Aufgabe (6 Punkte): Eine Kugel mit der Masse $m = 1$kg bewege sich unter dem Einfluss der Schwerkraft $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die mit einem Winkel von 45° gegen die (x, y)-Ebene geneigt ist. Die Kugel befinde sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe in einer Höhe von $z = 1$ Meter auf der schiefen Ebene und wird dann losgelassen. Wie lange dauert es, bis die Kugel eine Höhe von $z = 0$ erreicht hat?