

week7: Monte Carlo Simulation, Teil1

Die Monte Carlo Methode ist auf Grund ihrer universellen Einsetzbarkeit eine sehr wichtige numerische Rechenmethode sowohl in den Natur- als auch in den Wirtschaftswissenschaften. Quantenmechanische Korrelationsfunktionen etwa lassen sich als Erwartungswerte von geeigneten zufälligen Grössen schreiben und dann mit Hilfe von Monte Carlo evaluieren. Ebenso lassen sich Optionspreise in der Finanzmathematik als Erwartungswerte vom Option Payoff schreiben. Mit der Monte Carlo Methode können diese Erwartungswerte dann für völlig beliebige Optionsauszahlungen sehr effizient und in sehr standardisierter Form berechnet werden. Insbesondere für pfadabhängige oder sogenannte exotische Optionen ist die Monte Carlo Methode daher das numerische Standardverfahren schlechthin zur Berechnung von Preisen und Sensitivitäten ('price and greeks').

Beispiel 1: Optionspreise im Black-Scholes Modell: Gegeben sei eine Option mit Auszahlungsfunktion

$$H = H(S_T) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1)$$

und Underlying $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$, der Optionskäufer bekommt vom Optionsverkäufer, typischerweise eine Bank, bei Fälligkeit $t = T$ den Betrag $H(S_T)$ ausbezahlt. Dann ist der Black-Scholes Preis V_0 dieser Option zur Zeit $t = 0$ gegeben durch das Integral

$$V_0 = e^{-rT} \int_{-\infty}^{+\infty} H(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}) e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (2)$$

Dabei ist S_0 der aktuelle Underlyingpreis zur Zeit $t = 0$, r ist der jährliche Zinssatz (wenn die Laufzeit T ebenfalls in Jahren angegeben ist) und σ ist die jährliche Volatilität. Da Optionsauszahlungen H völlig beliebig sein können (ein Unternehmen kann zu einer Bank gehen und sagen, wir hätten gerne dieses H , könnt ihr uns das verkaufen?), ist es also wichtig, einen Bewertungsalgorithmus zu haben, der für beliebige Optionsauszahlungen H funktioniert, und genau das ist die Monte Carlo Methode. In diesem konkreten Fall geht das dann folgendermassen: Zunächst mal können wir das V_0 in (2) als ein Integral gegen eine Wahrscheinlichkeitsdichte schreiben,

$$V_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(x) dx = \mathbb{E}[F] \quad (3)$$

mit

$$p(x) = \varphi_{\mu=0, \sigma=1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (4)$$

und

$$F(x) := e^{-rT} H(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}) \quad (5)$$

Das $p(x)$ ist hier also gerade die Dichte der Standard-Normalverteilung und das V_0 können wir auffassen als einen Erwartungswert bezüglich der Standard-Normalverteilung. Die Berechnung von Integralen der Form (3) mit Monte Carlo geht dann ganz einfach folgendermassen: Wir generieren N $p(x)$ -verteilte Zufallszahlen

$$x_1, x_2, \dots, x_N \quad (6)$$

und bilden dann die Monte Carlo Summe (hier darf man nur das F nehmen, das p steckt schon in den Zufallszahlen drin)

$$S_N(F) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x_i) \quad (7)$$

Typische Werte für N sind etwa $N = 100'000$ oder $N = 1'000'000$. Dann gilt die folgende Abschätzung, die wir nächste Woche beweisen werden:

$$\text{Prob} \left[|S_N(F) - \mathbb{E}[F]| \geq \varepsilon \right] \leq \frac{\mathbb{V}[F]}{N\varepsilon^2} \quad (8)$$

Da die rechte Seite für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, für beliebig kleines $\varepsilon > 0$, können wir dann auch etwas intuitiver schreiben:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(F) = \mathbb{E}[F] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(x) dx \quad (9)$$

Bevor wir uns nächste Woche dann also den theoretischen Beweis von (8) anschauen, wollen wir hier zunächst mal an 2 konkreten Beispielen überprüfen, dass das auch tatsächlich funktionieren tut. Dazu berechnen wir im ersten Beispiel die Preise von sogenannten Call- und Put-Optionen numerisch mit einer Monte Carlo Simulation und vergleichen das Resultat dann mit dem analytisch exakten Resultat welches für Call- und Put-Optionen noch in geschlossener Form angegeben werden kann, das sind dann die berühmten Black-Scholes Formeln. Das zweite Beispiel ist dann eine standard Monte Carlo Übungsaufgabe, so wie sie etwa auch in der Klausur vorkommen könnte.

Theorem 7.1 (Black-Scholes Formeln): Gegeben seien die folgenden Optionsauszahlungen mit Laufzeit T und Underlying $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$:

$$H_{\text{call}}(S_T) := \max\{S_T - K, 0\} \quad (10)$$

$$H_{\text{put}}(S_T) = \max\{K - S_T, 0\} \quad (11)$$

wobei K ein gegebener Parameter ist (etwa $K = S_0$ ist eine typische Wahl). Dann gilt: Der Preis V_0 dieser Optionen zur Zeit $t = 0$, gegeben durch das Integral (2), lässt sich reduzieren auf

$$V_{\text{call},0} = +S_0 \Phi(+d_+) - K e^{-rT} \Phi(+d_-) \quad (12)$$

$$V_{\text{put},0} = -S_0 \Phi(-d_+) + K e^{-rT} \Phi(-d_-) \quad (13)$$

mit

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{\text{R Software}}{=} \text{pnorm}(x) \quad (14)$$

und

$$d_{\pm} := \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2}) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (15)$$

Monte Carlo Test: Verifizieren Sie die Black-Scholes Formeln (12,13) durch eine Monte Carlo Simulation in R. Wählen Sie dazu etwa die folgenden Parameterwerte:

$$\begin{aligned} S_0 &= 100 \\ K &= 100 \\ T &= 2 \\ \sigma &= 20\% \\ r &= 3\% \end{aligned}$$

und für die Monte Carlo Simulation wählen Sie etwa $N = 100'000$ Zufallszahlen.

→ Start R-Session

Beispiel 2: Berechnen Sie das Integral (mit $\log 4 = \log_e 4$, Logarithmus zur Basis e)

$$I := \int_0^{\log 4} e^{-x/2} dx$$

- a) analytisch mit Bleistift und Papier.
- b) numerisch mit einer Monte Carlo Simulation, indem Sie exponential-verteilte Zufallszahlen benutzen. Die Exponential-Verteilung ist in R vorimplementiert und hat den R-Namen `exp`. Die Dichte ist gegeben durch

$$p(x) = p_{\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \stackrel{\text{R Software}}{=} \text{dexp}(x, \text{rate} = \lambda)$$

- c) numerisch mit einer Monte Carlo Simulation, indem Sie auf dem Intervall $[0, \log 4]$ gleichverteilte Zufallszahlen benutzen. Die Gleichverteilung ist in R vorimplementiert und hat den R-Namen `unif`.

Was ist also jeweils das F und das p in Teil (b) und (c), wenn Sie das zu berechnende Integral I in der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(x) dx$$

mit einer entsprechenden W'keitsdichte $p(x)$ schreiben wollen? Wählen Sie etwa $N = 100'000$ Zufallszahlen.

Lösung 2a) Das exakte Resultat ist

$$I = -2e^{-x/2} \Big|_0^{\log 4} = 2(1 - e^{-\frac{\log 4}{2}}) = 2(1 - e^{-\log(4^{1/2})}) = 2\left(1 - \frac{1}{e^{\log(2)}}\right) = 1$$

2b) Wir schreiben zunächst

$$I = \int_0^\infty \chi(0 \leq x \leq \log 4) e^{-x/2} dx$$

mit der Indikator-Funktion

$$\chi(a \leq x \leq b) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und dann, da die Dichte der Exponential-Verteilung mit Parameter λ durch den Ausdruck

$$p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

gegeben ist, wir brauchen da also ein λ vor dem $e^{-\lambda x}$, das λ ist hier gleich $\frac{1}{2}$,

$$I = 2 \int_0^\infty \chi(0 \leq x \leq \log 4) \frac{1}{2} e^{-x/2} dx =: \int_{\mathbb{R}} F(x) p(x) dx$$

mit dem Integranden

$$F(x) := 2 \cdot \chi(0 \leq x \leq \log 4) \tag{16}$$

und der W'keitsdichte

$$p_{\lambda=\frac{1}{2}}(x) := \frac{1}{2} e^{-x/2} \chi(x \geq 0) \tag{17}$$

Sind also x_1, x_2, \dots, x_N mit Parameter $\lambda = 1/2$ exponential-verteilte Zufallszahlen, in R bekommen wir die mit der Syntax `x = rexp(N, rate=0.5)`, dann lautet die Monte Carlo Approximation für I

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x_i) \tag{18}$$

mit dem F gegeben durch (16).

2c) Wir schreiben

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x/2} \chi(0 \leq x \leq \log 4) dx = \log 4 \int_{-\infty}^\infty e^{-x/2} \frac{\chi(0 \leq x \leq \log 4)}{\log 4} dx \\ &=: \int_{\mathbb{R}} F(x) p(x) dx \end{aligned}$$

mit dem Integranden

$$F(x) := \log 4 \cdot e^{-x/2} \quad (19)$$

und der W'keitsdichte

$$p(x) := \frac{\chi(0 \leq x \leq \log 4)}{\log 4} \quad (20)$$

Sind also x_1, x_2, \dots, x_N auf dem Intervall $[0, \log 4]$ gleichverteilte Zufallszahlen, , in R bekommen wir die mit der Syntax `x = runif(N, min=0, max=log(4))`, dann lautet die Monte Carlo Approximation für I

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(x_i) \quad (21)$$

mit dem F gegeben durch (19).

Ok, tun wir die Sachen jetzt konkret in R berechnen → Start R-Session