

week3+4: Das Binomialmodell und die Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie ergibt sich in natürlicher Weise bei der Betrachtung des Binomialmodells. Das Binomialmodell ist ein grundlegendes Modell in der Finanzmathematik, wegen seiner Einfachheit ist in diesem Modell die grundlegende Optionspreis-Logik in sehr transparenter Weise nachvollziehbar. Auf der anderen Seite ist es aber auch hinreichend reichhaltig, so dass man in einem geeigneten Limes das Black-Scholes Modell erhält, und das ist eines der standard option pricing models in der Finanzmathematik. Wir betrachten zunächst den einfachst möglichen Fall, das ist ein Ein-Perioden Binomialmodell, und dann ein Vier-Perioden Binomialmodell. Also zunächst das Ein-Perioden Binomialmodell:

<https://hsrm-mathematik.de/WS2425/Wirtschaftsmathematik3/Grundidee-Optionspreisbewertung.pdf>

Das war Level 1 sozusagen. Jetzt kommt Level 2, ein Vier-Perioden Binomialmodell:

<https://hsrm-mathematik.de/WS2425/Wirtschaftsmathematik3/binomial-model-option-pricing.xlsm>

Diese Optionspreis-Logik werden Sie nicht in der Klausur gefragt, das soll nur zur Motivation dienen. Diese Veranstaltung ist ja keine Spezialvorlesung in Finanzmathematik, sondern eine W'theorie und Statistik. Geben wir jetzt die Definition für das n -Perioden Binomialmodell an:

Definition 3.1 (n -Perioden Binomialmodell): Es bezeichne

$$\{ S(t_k) \}_{k=0}^n$$

den Preis eines liquide handelbaren Assets zu den Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_n und die Returns seien gegeben durch

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})} \quad (1)$$

so dass

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \cdot [1 + \text{ret}(t_k)] \quad (2)$$

Wir sagen, dass der Preisprozess (2) durch ein n -Perioden Binomialmodell gegeben ist, genau

dann, wenn es für die Returns immer nur zwei Einstellungsmöglichkeiten gibt, also wenn

$$\text{ret}(t_k) \in \{ \text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}} \} \quad (3)$$

Ende Definition

Typische Werte für tägliche Returns sind etwa

$$\text{ret}_{\text{up/down}} = \pm 1\% = \pm 0.01$$

und typische Werte für monatliche Returns sind etwa

$$\text{ret}_{\text{up/down}} = \pm 5\% = \pm 0.05 .$$

Da wir gleich mit der Gleichung (2) weiterrechnen wollen, hier nochmal eine sehr ausführliche Herleitung von (2) aus (1): Wir multiplizieren beide Seiten von (1) mit $S(t_{k-1})$ und bekommen

$$S(t_{k-1}) \cdot \text{ret}(t_k) = S(t_k) - S(t_{k-1}) \quad (4)$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten von (4) ein $S(t_{k-1})$ und bekommen

$$S(t_{k-1}) \cdot \text{ret}(t_k) + S(t_{k-1}) = S(t_k) \quad (5)$$

Schliesslich klammern wir auf der linken Seite von (5) das $S(t_{k-1})$ aus und erhalten

$$S(t_{k-1}) \cdot [\text{ret}(t_k) + 1] = S(t_k) \quad (6)$$

und diese Gleichung (6) ist offensichtlich dasselbe wie die Gleichung (2). ■

Schreiben wir uns die Gleichung (2) für $k = n$ hin:

$$S(t_n) = S(t_{n-1}) \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (7)$$

Das $S(t_{n-1})$ auf der rechten Seite von (7) können wir ebenfalls schreiben mit Gleichung (2),

$$S(t_{n-1}) = S(t_{n-2}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \quad (8)$$

Wir setzen (8) in (7) ein und erhalten

$$S(t_n) = S(t_{n-2}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (9)$$

Jetzt schreiben wir das $S(t_{n-2})$ mit Hilfe von Gleichung (2)

$$S(t_{n-2}) = S(t_{n-3}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-2})] \quad (10)$$

und setzen das in Gleichung (9) ein,

$$S(t_n) = S(t_{n-3}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-2})] \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (11)$$

Das kann man offensichtlich immer so weiter machen und erhält schliesslich

$$\begin{aligned} S(t_n) &= S(t_0) \cdot [1 + \text{ret}(t_1)] \cdot [1 + \text{ret}(t_2)] \cdots [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \\ &= S(t_0) \prod_{k=1}^n [1 + \text{ret}(t_k)] \end{aligned} \quad (12)$$

Die Gleichung (12) gilt immer, egal ob man ein Binomialmodell zu Grunde legen möchte oder etwas völlig beliebiges, halten wir das vielleicht in einem kleinen Theorem fest:

Theorem 3.1: Definiert man die Returns eines Assetpreisprozesses $\{S(t_k)\}_{k=0}^n$ durch (1),

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

dann lässt sich der Preis $S(t_n)$ aus den Returns berechnen gemäss (12),

$$S(t_n) = S(t_0) \prod_{k=1}^n [1 + \text{ret}(t_k)] .$$

Betrachten wir jetzt die Preisdynamik im Binomialmodell. Wir wollen also annehmen, dass es für die Returns immer nur zwei Einstellungsmöglichkeiten gibt, wie in (3):

$$\text{ret}(t_k) \in \{ \text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}} \}$$

Welche Preise sind für ein $S(t_n)$ möglich? Wir haben n Returns $\text{ret}(t_1), \dots, \text{ret}(t_n)$, jeder einzelne Return ist entweder ein up-return oder ein down-return. Folgende Preispfade sind möglich:

n up-returns:

$$(\text{up}, \text{up}, \dots, \text{up}) \Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^n$$

$n - 1$ up-returns, 1 down-return:

$$(\text{up}, \text{up}, \dots, \text{up}, \text{down}) \Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}})$$

$$\begin{aligned} (\text{up}, \text{up}, \dots, \text{down}, \text{up}) &\Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-2} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) (1 + \text{ret}_{\text{up}}) \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} (\text{down}, \text{up}, \dots, \text{up}, \text{up}) &\Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{down}}) (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) \end{aligned}$$

Also: n Preispfade sind möglich, aber alle haben denselben Endpreis:

$$S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^1 =: S_{n-1,1}$$

$n - k$ up-returns, k down-return:

Der Endpreis ist wieder immer derselbe,

$$S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-k} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^k =: S_{n-k,k}$$

aber wie viele verschiedene Preispfade gibt es? Äquivalent: Auf wie viele verschiedene Art und Weisen kann man aus n Zeitpunkten k Zeitpunkte (für einen down-move) auswählen? Das ist wie Ziehung der Lottozahlen, aus 49 Kugeln möchte man 6 verschiedene rausziehen, und die Anzahl dafür ist ein Binomialkoeffizient,

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! (49-6)!} = \frac{49!}{6! 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13'983'816$$

Die allgemeine Definition ist also

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot [n - (k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$$

und es gilt die allgemeine Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Der R-Befehl zur Berechnung von Binomialkoeffizienten ist `choose(n,k)`.

Die Binomialverteilung

Bisher haben wir noch gar keine Wahrscheinlichkeiten gehabt, erstaunlicherweise braucht man die auch gar nicht, wenn es nur darum geht, Optionspreise im Binomialmodell zu berechnen: Auf dem Excelsheet `binomial-model-option-pricing.xlsm` gibt es nirgendwo eine Zelle, wo man etwa eine Wahrscheinlichkeit für einen up-return eingeben muss. Im Gegenteil, ganz oben in den Zellen C1 bis F1 kann man ja völlig beliebig irgendwelche up- oder down-returns eingeben, und der Option-Payoff wird in jedem Fall repliziert, das ist gerade die zentrale option pricing Logik und es ist schon recht erstaunlich, dass das überhaupt so funktioniert.

Es ist aber trotzdem nützlich, das werden wir gleich weiter unten im Theorem 3.2 sehen, die Returns mit Wahrscheinlichkeiten zu versehen, also etwa:

$$\text{Prob}[\text{ret}(t_k) = \text{ret}_{\text{up}}] = p_{\text{up}}$$

$$\text{Prob}[\text{ret}(t_k) = \text{ret}_{\text{down}}] = p_{\text{down}} = 1 - p_{\text{up}}$$

Dadurch werden auch die Assetpreise $S(t_n)$ zu stochastischen Größen und es gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Prob}[S(t_n) = S_{k,n-k}] &= \text{Prob}\left[S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^k (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{n-k}\right] \\ &= \text{Prob}\left[\text{es gibt genau } k \text{ up-returns}\right] \\ &= \binom{n}{k} p_{\text{up}}^k (1 - p_{\text{up}})^{n-k} \end{aligned}$$

Definition 3.2 (Binomialverteilung): Es sei p eine Zahl zwischen 0 und 1, $p \in [0, 1]$, und $n \in \mathbb{N}$ sei eine natürliche Zahl. Dann heisst die Menge der Zahlen

$$\{ B_{n,p}(k) \}_{k=0}^n$$

mit

$$B_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

eine Binomialverteilung mit Umfang n und Erfolgswahrscheinlichkeit p .

Überprüfen wir eben, dass die Summe aller W'keiten gleich 1 ist. Dazu benutzen wir die allgemeine Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (13)$$

und erhalten mit $a := p$ und $b := 1-p$

$$\sum_{k=0}^n B_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \stackrel{(13)}{=} [p + (1-p)]^n = 1^n = 1. \quad \blacksquare$$

Die Binomialverteilung ist in R vorimplementiert und kann mit der Syntax

$$B_{n,p}(k) = \text{dbinom}(k, \text{size} = n, \text{prob} = p)$$

berechnet werden.

In einer Spezialvorlesung über Finanzmathematik wird dann noch das folgende Theorem bewiesen (also nicht klausurrelevant):

Theorem 3.2: Es seien $\{ S_{k,n-k} \}_{k=0}^n$ die möglichen Assetpreise eines Underlyings $S(t_n)$ welches durch ein Binomialmodell modelliert werde,

$$S_{k,n-k} = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^k (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{n-k}$$

Eine Optionsauszahlung H ist dann eine beliebige Funktion, die jedem möglichen Assetpreis $S_{k,n-k}$ eine reelle Zahl

$$H(S_{k,n-k}) \in \mathbb{R}$$

zuordnet, der Käufer der Option H bekommt vom Verkäufer den Betrag $H(S_{k,n-k})$ ausbezahlt, falls sich bei Fälligkeit t_n der Option der Underlyingpreis $S(t_n) = S_{k,n-k}$ realisiert hat. Definiert man nun die sogenannten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten p_{up} und p_{down} durch

$$p_{\text{up}} := \frac{-\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}, \quad p_{\text{down}} := \frac{+\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

dann gilt: Der Preis der Option H , der theoretical fair value, lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} \text{Price of Option}(H) &= \mathbb{E}[H] = \sum_{k=0}^n H(S_{k,n-k}) \text{Prob}[S(t_n) = S_{k,n-k}] \\ &= \sum_{k=0}^n H(S_{k,n-k}) B_{n,p_{\text{up}}}(k) \end{aligned} \quad (14)$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}[\cdot]$ ist also ein Erwartungswert bezüglich der Binomialverteilung

$$B_{n,p_{\text{up}}}(k) = \binom{n}{k} p_{\text{up}}^k (1 - p_{\text{up}})^{n-k} = \text{Prob}[S(t_n) = S_{k,n-k}]$$

und das k bezeichnet jetzt also die Anzahl der up-moves (auf Seite 4 oben war das k die Anzahl der down-moves).

Jetzt wollen wir noch den Erwartungswert und die Varianz einer binomialverteilten Zufallszahl berechnen:

Theorem 3.3: Es sei k eine binomialverteilte Zufallszahl einer Binomialverteilung mit Umfang n und Erfolgswahrscheinlichkeit p , also

$$\text{Prob}[k = \tilde{k}] = B_{n,p}(\tilde{k}) = \binom{n}{\tilde{k}} p^{\tilde{k}} (1 - p)^{n-\tilde{k}}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[k] &= np \\ \mathbb{V}[k] &= np(1 - p) \end{aligned} .$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\mathbb{E}[k] = \sum_{k=0}^n k B_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Wir definieren

$$q := 1 - p$$

und betrachten, was Ableitungen nach p angeht, p und q als unabhängige Variablen. Wir können dann schreiben

$$\begin{aligned} k p^k &= p \frac{d}{dp} p^k \\ k p^k q^{n-k} &= p \frac{d}{dp} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[k] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p \frac{d}{dp} p^k q^{n-k} = p \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &\stackrel{(13)}{=} p \frac{d}{dp} (p + q)^n = p n (p + q)^{n-1} \stackrel{q=1-p}{=} p n 1^{n-1} = np \end{aligned}$$

Um die Varianz zu berechnen, benutzen wir die allgemeine Formel aus Aufgabe 3c vom Übungsblatt2, das war

$$V[F] = E[F^2] - (E[F])^2 .$$

Hier ist $F(k) = k$ und wir müssen noch das $E[k^2]$ berechnen. Das können wir ganz analog zu der Rechnung für $E[k]$ machen:

$$\begin{aligned} E[k^2] &= \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 p^k q^{n-k} = \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &\stackrel{(13)}{=} \left(p \frac{d}{dp}\right)^2 (p+q)^n = p \frac{d}{dp} \left[p \frac{d}{dp} (p+q)^n \right] = p \frac{d}{dp} \left[p n (p+q)^{n-1} \right] \\ &= p n (p+q)^{n-1} + p^2 n(n-1) (p+q)^{n-2} \stackrel{q=1-p}{=} p n 1^{n-1} + p^2 n(n-1) 1^{n-2} \\ &= n p + n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir schliesslich

$$\begin{aligned} V[k] &= E[k^2] - (E[k])^2 \\ &= n p + n(n-1) p^2 - (n p)^2 \\ &= n p + (n^2 - n) p^2 - n^2 p^2 \\ &= n p - n p^2 = n p (1-p) \end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Bemerkung: Beweise sind grundsätzlich nicht klausurrelevant.

Die Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung ergibt sich direkt im Limes

$$n \rightarrow \infty, \quad p \rightarrow 0, \quad n \cdot p =: \lambda \stackrel{!}{=} \text{konstant}$$

aus der Binomialverteilung, also schauen wir uns das hier vielleicht noch an. Bevor wir das entsprechende Theorem hinschreiben, können wir eine kleine Motivation betrachten:

Im Beweis auf slide 5 wurde dabei die folgende Tatsache verwendet: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt die Identität

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Checken wir das eben mit einer kurzen R-Simulation: Mit dem Code

```
n1 = 100
n2 = 1000

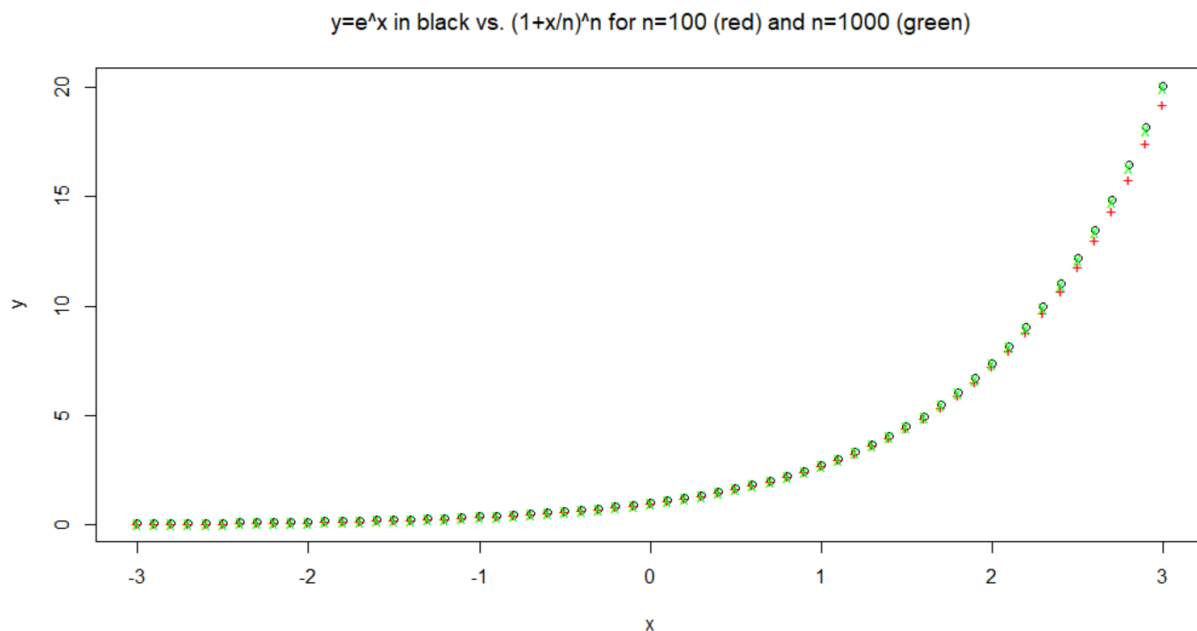
x = seq(from=-3, to=+3, by=0.1 )
y = exp(x)
z1 = (1 + x/n1 )^n1
z2 = (1 + x/n2 )^n2

# man kann Funktionen direkt auf Vektoren anwenden,
# R rechnet immer elementweise, ist R vectorized
# calculation logic

plot(x, y, main = "y=e^x in black vs. (1+x/n)^n for n=100 (red) and n=1000 (green)", font.main=1 )
points(x, z1, col = "red", pch = "+" )
points(x, z2, col = "green", pch = "x" )

# pch = plot character
```

erhalten wir etwa das folgende Bild:



Das passt also.

Theorem 3.4 (Poisson-Verteilung): Wir betrachten eine Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ mit Umfang n und Erfolgswahrscheinlichkeit p und setzen

$$p := \frac{\lambda}{n}$$

mit einer Konstanten $\lambda > 0$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,p=\lambda/n}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: P_\lambda(k)$$

und die Menge der Zahlen $\{P_\lambda(k)\}_{k=0}^\infty$ heisst die Poisson-Verteilung mit Erwartungswert oder Parameter λ .

Bemerkung: Ebenso wie die Binomialverteilung ist auch die Poisson-Verteilung in R vorimplementiert und kann mit der Syntax (also nur die rechte Seite)

$$P_\lambda(k) = \text{dpois}(k, \text{lambda} = \lambda)$$

aufgerufen werden, das brauchen Sie etwa in der Aufgabe 5 auf dem Übungsblatt 3+4.

Nächste Woche werden wir uns dann ganz allgemein die Funktionalitäten anschauen, die von der R-Software für Zufallszahlen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Verfügung gestellt werden.