Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

Wirtschaftsmathematik III
WS 2024/25

week2: Diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ganz allgemein kann man die folgende Definition machen:

Definition: Eine Menge von positiven Zahlen heisst eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn die Summe von all diesen Zahlen gleich 1 ist.

Dabei spricht man von diskreten und von stetigen oder auch kontinuierlichen Verteilungen, schauen wir uns ein paar Beispiele an, um die Begrifflichkeiten klar zu machen.

Beispiel 1, endlich viele Werte:

1a) Werfen einer Münze: 2 Zahlen

$$p_{\text{Kopf}} = \tfrac{1}{2}\,, \quad p_{\text{Zahl}} = \tfrac{1}{2}\,, \qquad p_{\text{Kopf}} + p_{\text{Zahl}} = 1$$

1b) Werfen eines Würfels: 6 Zahlen

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = \tfrac{1}{6}\,, \qquad \sum_{k=1}^{6} p_k = 1$$

Beispiel 2, unendlich viele Werte, diskret: Wir spielen Roulette, dort gibt es 37 Zahlen, 18 rote, 18 schwarze und eine grüne Null. Wir wählen folgende Strategie:

(1) Wir setzen 1 Euro auf Rot. Kommt dann auch Rot, bekommen wir 2 Euro und haben dann also 1 Euro Gewinn gemacht. Die Strategie ist beendet und beim nächsten Spiel beginnen wir wieder mit Schritt (1).

(2) Kommt bei (1) Schwarz oder Grün, verdoppeln wir den Einsatz und setzen 2 Euro auf Rot. Kommt dann auch Rot, bekommen wir 4 Euro und haben dann also $4 - (2+1) = 1$ Euro Gewinn gemacht. Die Strategie ist beendet und beim nächsten Spiel beginnen wir wieder mit Schritt (1).

(3) Kommt bei (2) Schwarz oder Grün, verdoppeln wir den Einsatz und setzen 4 Euro auf Rot. Kommt dann auch Rot, bekommen wir 8 Euro und haben dann also $8 - (4 + 2 + 1) = 1$ Euro Gewinn gemacht. Die Strategie ist beendet und beim nächsten Spiel beginnen wir wieder mit Schritt (1).

$\vdots$ *..und so weiter..*

(n) Kommt bei (n-1) Schwarz oder Grün, verdoppeln wir den Einsatz und setzen 2^{n-1} Euro auf Rot. Kommt dann auch Rot, bekommen wir $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ Euro und haben dann also $2^n - (2^{n-1} + \cdots + 2 + 1) = 1$ Euro Gewinn gemacht[1]. Die Strategie ist beendet und beim nächsten Spiel beginnen wir wieder mit Schritt (1).

Es sei jetzt p_n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir genau n mal spielen und $n-1$ mal verdoppeln müssen, um 1 Euro zu gewinnen. Dann gilt offensichtlich (das $\wedge$ bezeichnet ein logisches "Und")

$$\begin{aligned} p_n &= \mathsf{Prob}\Big[\underbrace{\{\text{nicht rot}\} \wedge \{\text{nicht rot}\} \wedge \cdots \wedge \{\text{nicht rot}\}}_{n-1 \text{ mal}} \wedge \{\text{rot}\}\Big] \\ &= \Big(\mathsf{Prob}\big[\{\text{nicht rot}\}\big]\Big)^{n-1} \cdot \mathsf{Prob}\big[\{\text{rot}\}\big] \end{aligned}$$

Oder, mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p &:= \mathsf{Prob}\big[\{\text{rot}\}\big] = \tfrac{18}{37} \\ 1-p &= 1 - \mathsf{Prob}\big[\{\text{rot}\}\big] = \mathsf{Prob}\big[\{\text{nicht rot}\}\big] = \tfrac{19}{37} \end{aligned}$$

dann etwas kompakter

$$p_n = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Checken wir noch, dass die Summe aller p_n auch tatsächlich gleich 1 ist:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \big[(1-p)^{n-1} \cdot p\big] \\ &= p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \\ &\overset{k=n-1}{=} p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\ &\overset{\substack{\text{Ü-Blatt1,} \\ \text{Aufg4}}}{=} p \, \frac{1}{1-(1-p)} = p \, \frac{1}{p} = 1 \, . \end{aligned}$$

Definition 2.1 (geometrische Verteilung): Es sei p eine Zahl zwischen 0 und 1, $p \in (0,1)$. Dann heisst die Menge von Zahlen

$$\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$$

mit

$$p_n := (1-p)^{n-1} \cdot p$$

die geometrische Verteilung.

[1] die Formel $1 + x + \cdots + x^{n-1} = (x^n - 1)/(x-1)$ beweisen wir auf dem neuen Übungsblatt

Bemerkung: Manchmal definiert man auch die $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ mit $p_k = (1-p)^k\, p$ als geometrische Verteilung, das ist dann etwa die Variante B auf der Wikipedia-Seite

`https://de.wikipedia.org/wiki/Geometrische_Verteilung`

Beispiel 3, stetige Verteilung: Es bezeichne

$$\{\ S(t_k)\ \}_{k=0}^{n}$$

die Zeitreihe der täglichen Schlusskurse des S&P500 Aktienindex, der umfasst die 500 grössten börsennotierten Unternehmen in den USA und ist ein standard Aktienindex für ökonometrische Analysen. Die täglichen Returns am Tag t_k sind definiert durch 'Preis heute minus Preis gestern durch Preis gestern', also genauer:

$$\mathrm{ret}(t_k) \;:=\; \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

Mit Hilfe dieser Returns kann man für einen gegebenen Tag t_k mit $k \geq d$ eine d-Tages-Volatilität $\mathrm{vol}_d(t_k)$ berechnen. Diese ist definiert durch die Formel

$$\mathrm{vol}_d(t_k) \;:=\; \Big\{ \tfrac{1}{d} \sum_{j=0}^{d-1} [\,\mathrm{ret}(t_{k-j})\,]^2 \Big\}^{1/2}$$

Typische Werte für d sind etwa $d = 15$ Tage oder $d = 20$ Tage, man berücksichtigt also jeweils die letzten 3 oder 4 Wochen, eine Woche hat 5 Handelstage. Definiert man nun normierte oder standardisierte Returns durch

$$\mathrm{normret}_d(t_k) \;:=\; \frac{\mathrm{ret}(t_k)}{\mathrm{vol}_d(t_{k-1})}$$

dann stellt man fest (das machen wir dann konkret im Kapitel 6 dieser Veranstaltung, mit der R-Software), dass sich diese normierten Returns recht gut durch eine Standard-Normalverteilung approximieren lassen, es gilt die folgende approximative Identität:

$$\mathsf{Prob}\Big[\ \mathrm{normret}_d(t_k) \,\in\, (x, x+dx)\ \Big] \;\approx\; e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}}\ .$$

Definition 2.2 (Standard-Normalverteilung): Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x) \;:=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

wird als die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Und die Funktion

$$\Phi(x) \;:=\; \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\, dy \;=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\, \tfrac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

wird dann auch als kummulierte Verteilungsfunktion oder auch einfach nur als Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet.

Bemerkungen: a) Das Integral in dem $\Phi(x)$ lässt sich nicht weiter vereinfachen, man kann es nicht durch elementare Funktionen ausdrücken.

b) Es gilt

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \quad = \quad 1 \ ,$$

das überprüfen wir auf dem neuen Übungsblatt numerisch mit Hilfe der R-Software.

Mit diesen Beispielen im Hinterkopf geben wir jetzt die folgende, mathematisch etwas präzisere, Definition von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an:

Definition 2.3 (Wahrscheinlichkeitsverteilung):

a) Eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ist eine Menge von Zahlen $\{ p_k \}_{k=0}^{\infty}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \quad = \quad 1$$

und $p_k \geq 0$ für alle k.

b) Eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, eindimensional, ist eine Menge von Zahlen $\{ p(x) \}_{x\in\mathbb{R}}$ oder auch, mit einer etwas anderen Ausdrucksweise, eine Funktion $p = p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx \quad = \quad 1$$

und $p(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

c) Eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung, n-dimensional, ist eine Funktion

$$p \quad = \quad p(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad : \quad \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}$$

mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n \quad = \quad 1$$

und $p(x_1, \cdots, x_n) \geq 0$ für alle $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Im weiteren Verlauf der Veranstaltung meint 'stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung' typischerweise eine eindimensionale Verteilung wie im Teil (b) der Definition.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie sind die Begriffe Erwartungswert und Varianz von zentraler Bedeutung, die Definitionen davon sehen folgendermassen aus:

Definition 2.4 (Erwartungswert und Varianz):

a) Es sei $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine diskrete W'keitsverteilung und[2] $F = F(k) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Dann ist der Erwartungswert $\mathsf{E}[F]$ und die Varianz $\mathsf{V}[F]$ definiert durch

$$\mathsf{E}[F] := \sum_{k=0}^{\infty} F(k)\, p_k$$

$$\mathsf{V}[F] := \mathsf{E}\big[(F - \mathsf{E}[F])^2\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \big(F(k) - \mathsf{E}[F]\big)^2\, p_k \ .$$

b) Es sei $p = p(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige W'keitsverteilung und $F = F(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Dann ist der Erwartungswert $\mathsf{E}[F]$ und die Varianz $\mathsf{V}[F]$ definiert durch

$$\mathsf{E}[F] := \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, p(x)\, dx$$

$$\mathsf{V}[F] := \mathsf{E}\big[(F - \mathsf{E}[F])^2\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(F(x) - \mathsf{E}[F]\big)^2\, p(x)\, dx \ .$$

Machen wir dazu noch ein kleines

Beispiel 4, uniforme Verteilung: Die uniforme oder auch Gleichverteilung auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert durch die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x) = p_{a,b}(x) := \begin{cases} 1/(b-a) & \text{falls} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer uniform verteilten Zufallszahl x.

Lösung: Ist x eine Zufallszahl mit W'keitsverteilung $p(x)$ und wollen wir den Erwartungswert von x berechnen, dann müssen wir

$$F(x) := x$$

setzen in der Definition 2.4. Damit bekommen wir dann

$$\mathsf{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{a,b}(x)\, dx = \int_a^b x \cdot \tfrac{1}{b-a}\, dx = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{x^2}{2} \Big|_a^b = \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{b^2-a^2}{2} = \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{(b-a)(b+a)}{2} = \tfrac{b+a}{2}$$

für den Erwartungswert, das ist also genau die Mitte zwischen a und b, sehr plausibel. Um die Varianz zu berechnen, benutzen wir die allgemeine Formel aus Aufgabe 3 vom neuen Übungsblatt, sie lautet:

$$\mathsf{V}[F] = \mathsf{E}[F^2] - \big(\mathsf{E}[F]\big)^2$$

[2] $\mathbb{N}_0$ sind die natürlichen Zahlen mit Null, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, , 3, \cdots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$

wobei wir hier also für das F einfach das x nehmen können. Das $\mathsf{E}[x]$ haben wir gerade schon berechnet, also müssen wir noch das $\mathsf{E}[x^2]$ berechnen:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[x^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_{a,b}(x)\, dx = \int_a^b x^2 \cdot \tfrac{1}{b-a}\, dx = \tfrac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx \\ &= \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{x^3}{3} \Big|_a^b = \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{b^3-a^3}{3} \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die folgende allgemeine Formel:

$$\tfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1} + a^n$$

Für $n+1=3$ oder $n=2$ liefert das

$$\tfrac{b^3-a^3}{b-a} = b^2 + ba + a^2$$

Damit bekommen wir

$$\mathsf{E}[x^2] = \tfrac{1}{3}\, \tfrac{b^3-a^3}{b-a} = \tfrac{b^2+ba+a^2}{3}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[x] &= \mathsf{E}[x^2] - (\,\mathsf{E}[x]\,)^2 = \tfrac{b^2+ba+a^2}{3} - \tfrac{(b+a)^2}{4} = \tfrac{b^2+ba+a^2}{3} - \tfrac{b^2+2ba+a^2}{4} \\ &= \tfrac{4b^2+4ba+4a^2}{12} - \tfrac{3b^2+6ba+3a^2}{12} = \tfrac{b^2-2ba+a^2}{12} = \tfrac{(b-a)^2}{12}\,, \end{aligned}$$

je weiter a und b auseinander liegen, desto grösser wird die Varianz, ebenfalls sehr plausibel.