

9. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Wir wollen das Theorem 9.1 aus dem week9.pdf durch eine geeignete R-Simulation überprüfen. Dazu wählen wir etwa $n = 4$, also

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad (1)$$

mit normalverteilten Zufallszahlen $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ mit den folgenden Mittelwerten

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 5 \\ \mu_2 &= \mu_3 = -2 \\ \mu_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

und Standardabweichungen

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sqrt{3} \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 1 \\ \sigma_4 &= 2 \end{aligned} \quad (3)$$

- Erzeugen Sie dann $N = 10000$ von den ϕ 's gegeben durch (1) mit den Parametern (2) und (3).
- Plotten Sie ein Histogramm von den ϕ 's. Wählen Sie die optionalen Parameter `prob = TRUE` und etwa `breaks = 40`.
- Plotten Sie dann die theoretische Dichte der ϕ 's, gegeben durch das Theorem 9.1, ebenfalls in das Histogramm aus Teil (b), etwa in rot. Histogramm und theoretische Dichte sollten dann also in etwa übereinstimmen.

Aufgabe 2) Die Verteilungsfunktion oder kummulierte Verteilungsfunktion für die Standard-Normalverteilung ist gegeben durch das Gross-Phi, das war die folgende Funktion:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

Sie hat die folgende Eigenschaft, die Sie in der Aufgabe 3c benötigen:

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1 \quad (4)$$

a) Plotten Sie mit Hilfe der R-Software die drei Funktionen

$$\begin{aligned}f_1(x) &:= \Phi(x) \\f_2(x) &:= \Phi(-x) \\f_3(x) &:= \Phi(x) + \Phi(-x)\end{aligned}$$

über dem Intervall $[-5, +5]$ alle in einem Diagramm. Geben Sie jeder Funktion eine eigene Farbe.

b) Beweisen Sie dann die Identität (4) analytisch mit Bleistift und Papier. Benutzen Sie dazu die Identität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = 1 .$$

Aufgabe 3) Es sei x eine normalverteilte Zufallszahl mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ und y sei eine standard-normalverteilte Zufallszahl, also mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\text{Prob} \left[|y| \leq k \right]$$

für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Geben Sie zunächst einen theoretischen Ausdruck an und danach jeweils konkrete numerische Werte.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$\text{Prob} \left[|x - \mu| \leq k \sigma \right]$$

für $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Auch in diesem Fall können Sie immer noch konkrete numerische Werte angeben, obwohl das μ und das σ nicht weiter spezifiziert sind.

c) Wenn wir N standard-normalverteilte Zufallszahlen generieren und sagen wollen, von den N Zufallszahlen ist typischerweise genau eine betragsmässig grösser als ein $k \in \mathbb{R}^+$, welchen Wert muss dann k haben bei gegebenen N ? Geben Sie für $N = 1$ Million und $N = 1$ Milliarde jeweils den konkreten numerischen Wert von k an.