

8. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Gegeben sei das folgende Integral:

$$I := \int_0^2 e^{-x^2} dx$$

a) Zeigen Sie mit Bleistift und Papier, dass der exakte Wert von I in der Form

$$I = \sqrt{\pi} \left[\Phi_{\mu=0, \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}}(2) - \Phi_{\mu=0, \sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \right] \quad (1)$$

geschrieben werden kann mit

$$\Phi_{\mu, \sigma}(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad \text{R-Software} \quad \text{pnorm}(x, \text{mean} = \mu, \text{sd} = \sigma)$$

Geben Sie dann einen numerischen Wert für I an, indem Sie die `pnorm` Funktion in R benutzen.

- b) Berechnen Sie I numerisch in R mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation. Benutzen Sie dazu $N = 50000$ normalverteilte (aber nicht notwendig standard-normalverteilte) Zufallszahlen.
- c) Berechnen Sie I numerisch in R mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation. Benutzen Sie dazu $N = 50000$ gleichverteilte Zufallszahlen.

Aufgabe 2) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter und

$$I(\lambda) := e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

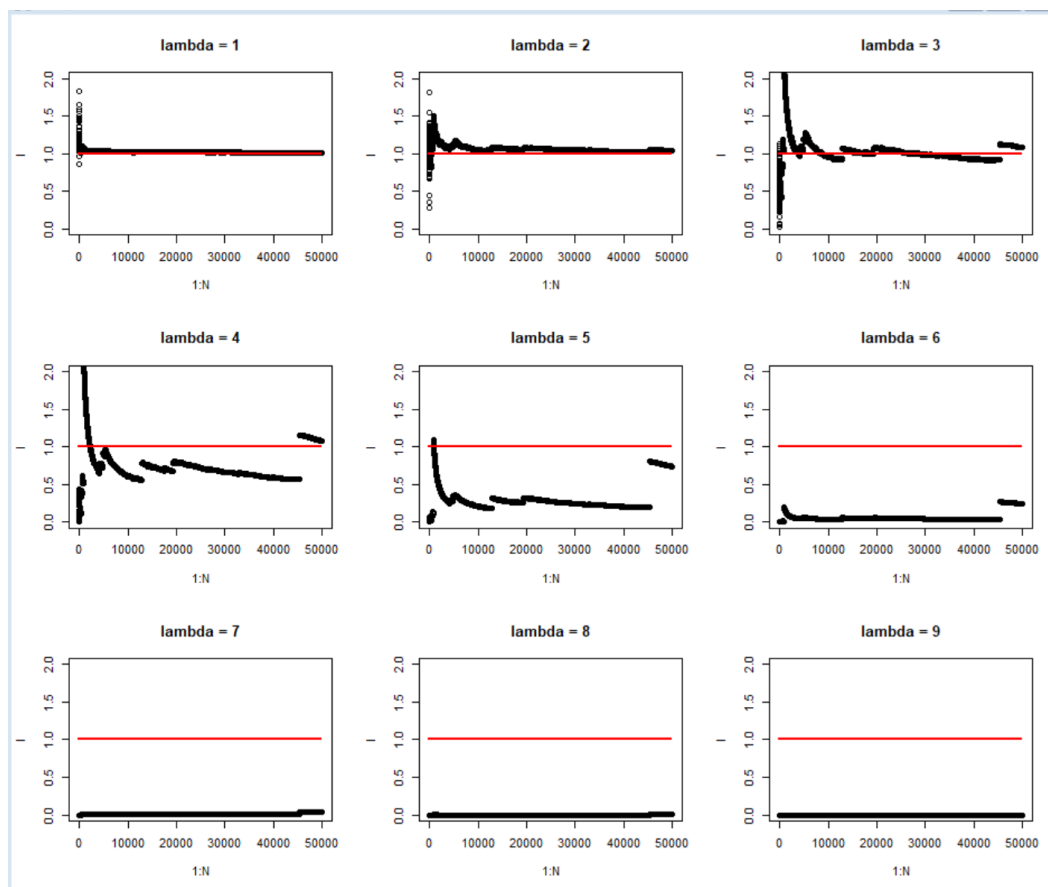
- a) Berechnen Sie den exakten Wert von $I(\lambda)$.
- b) Wir wollen den Wert von $I(\lambda)$ für

$$\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad (2)$$

mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation in R berechnen und wir wollen uns die Monte Carlo Konvergenz anschauen. Dazu wählen wir $N = 50000$ standard-normalverteilte Zufallszahlen x_1, \dots, x_N und bilden dann für $1 \leq n \leq N$ die Monte Carlo Summen

$$S_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda x_i}$$

Plotten Sie dann die $\{S_n(\lambda)\}_{n=1}^N$ für die neun verschiedenen λ 's aus (2) als Funktion von $n = 1, \dots, N$ in einem 3×3 Plot-Array, das können Sie mit der Syntax `par(mfrow = c(3,3))` erzeugen. Versuchen Sie etwa, qualitativ das folgende Bild zu reproduzieren:



Je nach Zufallszahlen sieht das natürlich immer ein bisschen anders aus.

- c) Offensichtlich scheint das für grössere Werte von λ nicht mehr zu funktionieren, woran könnte das liegen? Erinnern Sie sich dazu an die Abschätzung (8) aus dem week7.pdf und berechnen Sie das $V[F]$.

Aufgabe 3) Beweisen Sie das Lemma 8.1 aus dem week8.pdf, das war die folgende Aussage: Definiert man für zwei Zufallsgrößen X und Y die Kovarianz durch

$$\text{Cov}[X, Y] := E \left[(X - E[X]) (Y - E[Y]) \right]$$

dann gilt:

- a) $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
 b) Die Kovarianz ist bilinear, es gilt

$$\text{Cov}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1 \text{Cov}[X_1, Y] + \lambda_2 \text{Cov}[X_2, Y]$$

$$\text{Cov}[X, \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2] = \mu_1 \text{Cov}[X, Y_1] + \mu_2 \text{Cov}[X, Y_2]$$