Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2024/25

6. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Laden Sie sich von der VL-homepage die Zeitreihendaten der Microsoft-Aktie herunter, das ist das file `MSFT.csv`, und führen Sie dann die folgenden Berechnungen durch:

a) Importieren Sie die Daten nach R und speichern Sie sie in der Variablen `ms`. Vergewissern Sie sich, dass auch wirklich alles angekommen ist, etwa mit Hilfe von `str(ms)`.

b) Mit dem Befehl `head(ms)` können Sie sich die ersten 6 Zeilen des Datensatzes anzeigen lassen. Die für uns relevanten Zahlen sind die adjusted close Zahlen in der 7. Spalte. Speichern Sie nur diese adjusted close Werte in der Variablen `S`. Das sollte dann ein Vektor sein mit etwa 5000 Elementen, das entspricht etwa 20 Jahre an Zeitreihendaten, ein Jahr hat so um die 250 Handelstage.

c) Die Daten in dem `S` gehen von neu nach alt. Das wollen wir umkehren, so dass die Daten von alt nach neu gehen. Das kann man etwa mit dem revert-Befehl `rev()` machen. Wir überschreiben das `S` mit den neuen Daten, geben Sie also den Befehl `S = rev(S)` ein.

d) Plotten Sie das `S` in einem Diagramm. Plotten Sie ebenfalls $\log_2[S(t_k)/S(t_0)]$ in einem anderen Diagramm. Dabei bezeichnet $\log_2$ den Logarithmus zur Basis 2.

e) Berechnen Sie die Returns

$$\mathrm{ret}(t_k) \quad := \quad \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

und speichern Sie sie in dem Vektor `ret`. Plotten Sie die Returns.

f) Kopieren Sie sich jetzt aus dem `week6.txt` die drei Funktionen `dDayMean`, `dDayStdDev` und `dDayNormRet` und führen Sie den Code aus, so dass Sie also diese Funktionen in Ihrem R benutzen können.

g) Berechnen Sie die d-Tages-Mittelwerte

```
mean3    = dDayMean(3,ret)
mean15   = dDayMean(15,ret)
mean60   = dDayMean(60,ret)
mean250  = dDayMean(250,ret)
```

und plotten Sie alle 4 Zeitreihen in demselben Diagramm, in unterschiedlichen Farben.

h) Berechnen Sie die d-Tages-Standardabweichungen

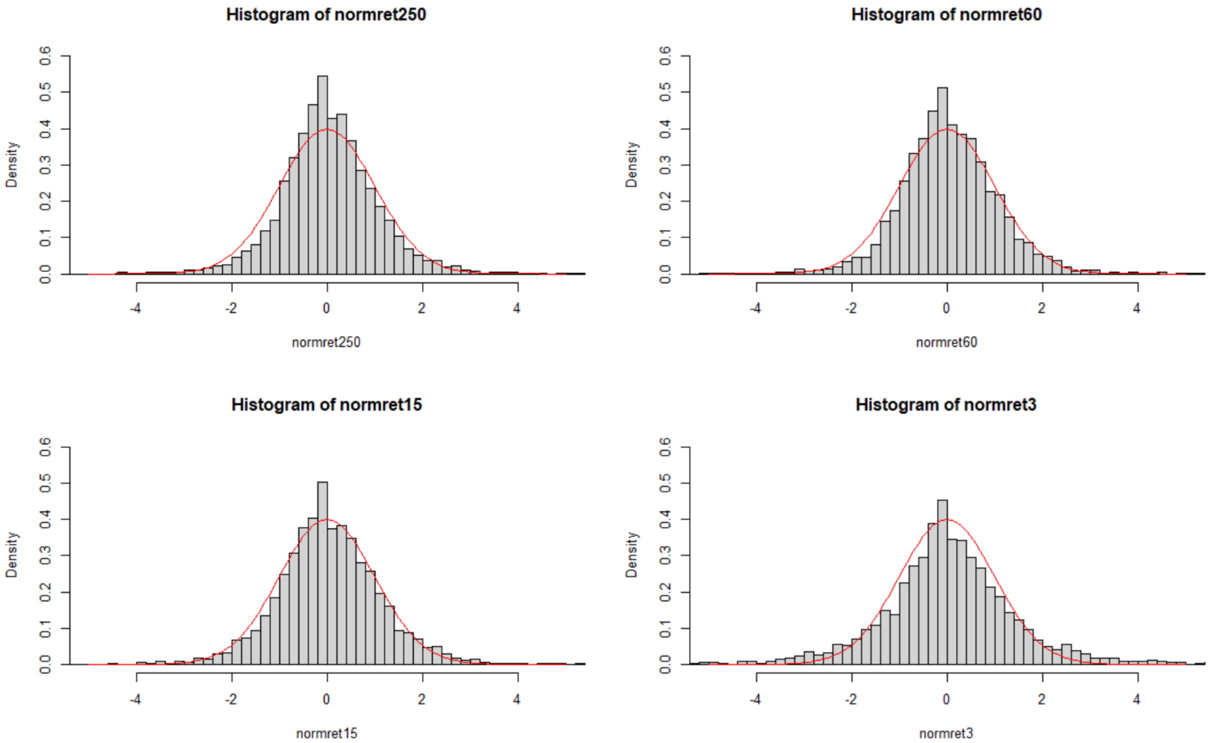
```
stddev3    = dDayStdDev(3,ret)
stddev15   = dDayStdDev(15,ret)
stddev60   = dDayStdDev(60,ret)
stddev250  = dDayStdDev(250,ret)
```

und plotten Sie alle 4 Zeitreihen in demselben Diagramm, in unterschiedlichen Farben.

i) Berechnen Sie schliesslich die normierten Returns

$$\text{normret}_d(t_k) \;:=\; \frac{\text{ret}(t_k)}{\text{stddev}_d(t_{k-1})}$$

und erstellen Sie Histogramme der normret_d für $d \in \{3, 15, 60, 250\}$. Wählen Sie den optionalen Parameter `prob = TRUE` und plotten Sie ebenfalls die Dichte der Standard-Normalverteilung in die Histogramme. Wenn Sie alles richtig gemacht haben, sollten Sie das folgende Bild bekommen:



Schauen Sie sich zum Bearbeiten dieser Aufgabe noch einmal das file `week6.txt` an und gehen Sie dann analog vor. Benutzen Sie insbesondere die dort angegebenen Funktionen `dDayMean(d,ret)`, `dDayStdDev(d,ret)` und `dDayNormRet(d,ret)`.

Aufgabe 2) Das Black-Scholes Modell ist ein stochastisches Modell für die Preise von liquide handelbaren Assets wie Aktien, Währungen oder Rohstoffe und ist gegeben durch die stochastische Rekursion ($k = 1, ..., N$)

$$S(t_k) \;=\; S(t_{k-1}) \cdot \left[\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\right] \tag{1}$$

mit $t_k \;=\; k\,\Delta t$ und Zeithorizont $T = t_N = N\Delta t$. Dabei ist ϕ_k eine standard-normalverteilte Zufallszahl. Wählen Sie die folgenden Parameter

$$\begin{aligned}
\mu &= 2\% \\
\sigma &= 20\% \\
S(t_0) &= 100 \\
T &= 2 && \text{(Jahre)} \\
\Delta t &= \tfrac{1}{250} && \text{(= 1 Tag, in Jahren)} \\
N &= \tfrac{T}{\Delta t} \;=\; 500
\end{aligned}$$

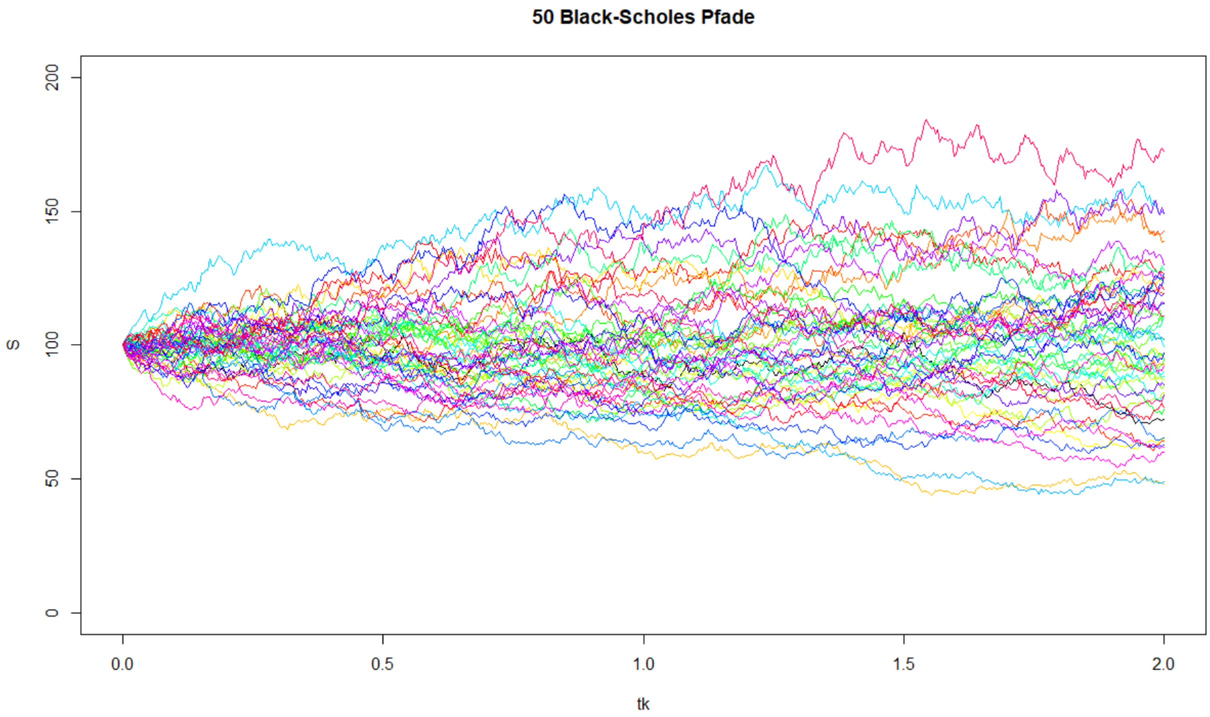
a) Simulieren Sie einen Preispfad $\{\, S(t_k) \,\}_{k=0}^{N}$ gegeben durch (1) und plotten Sie ihn in einem Diagramm.

b) Simulieren Sie dann, sagen wir, 50 Pfade und plotten Sie sie alle in dasselbe Diagramm. Wenn Sie Ihren Pfaden jeweils noch unterschiedliche Farben geben, etwa mit der Syntax

```
# die restlichen 49 Pfade:
npaths = 49
mycol = rainbow(npaths)

for( i in 1:npaths )
{
  for(k in ... )
  {
    phik = ...
    S[k] = S[k-1]*...
  }
  # plotten:
  points(tk, S, type="l", col=mycol[i] )
}
```

könnte Ihr Bild dann etwa folgendermassen aussehen:



Bemerkung: Da das Black-Scholes Modell ein stochastisches Modell ist, kann man damit natürlich keine Aktienpreise vorhersagen, wozu wird es dann gebraucht? Zur Bewertung von Optionen. Es stellt sich erstaunlicherweise heraus, dass Optionspreise **unabhängig** sind von dem Parameter μ, sie hängen nur von dem Volatilitätsniveau σ ab.

Das μ sagt gerade, ob das Underlying steigt, fällt oder neutral bleibt (man kann es also nicht vorhersagen) und auf dem Excelsheet `binomial-model-option-pricing.xlsm` hatten wir ja gesehen, dass es immer eine replizierende Strategie gibt, die die Optionsauszahlung replizieren tut, **unabhängig** davon, ob das Underlying steigt, fällt oder neutral bleibt.