Hochschule RheinMain WS 2024/25
Prof. Dr. D. Lehmann

3.+4. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Laden Sie sich die Folien `Grundidee-Optionspreisbewertung.pdf` von der VL-homepage herunter und lesen Sie sie durch. Schauen Sie sich insbesondere noch einmal die Rechnung auf slide 10 an. Betrachten Sie dann das folgende 1-Perioden Binomialmodell mit allgemeinen Parametern:

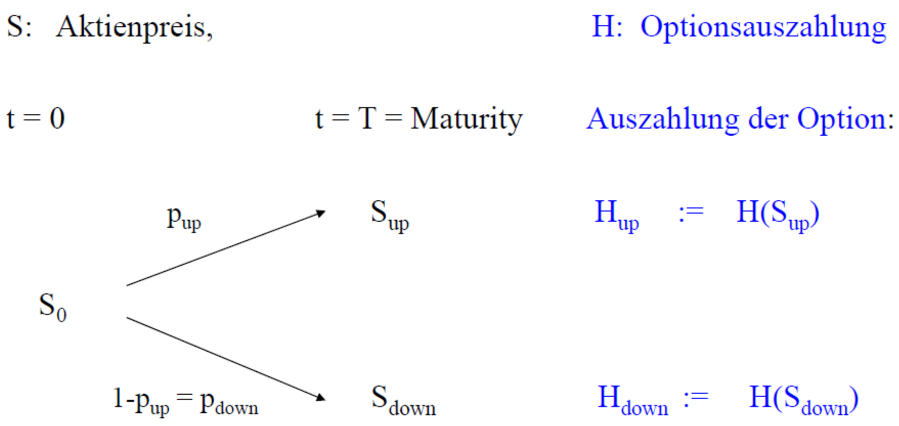

Abbildung 1: Ein-Perioden Binomialmodell mit allgemeinen Parametern

Durch eine geeignete Handelsstrategie lässt sich die Optionsauszahlung bei $t = T$, das ist das H_{up} und H_{down}, exakt replizieren. Dazu muss die Bank (oder der Optionsverkäufer) zur Zeit $t = 0$ eine Anzahl von δ Aktien (zum Preis $\delta \cdot S_0$) kaufen, dieses δ wollen wir hier bestimmen. Wir brauchen ein Startgeld V_0 (auf slide 10 sind das die 2,50 Euro, Sie müssen hier jetzt mit einem allgemeinen Buchstaben V_0 rechnen), um die replizierende Strategie aufsetzen zu können, dieses V_0 ist dann der Preis der Option H.

Für die beiden gesuchten Variablen V_0 und δ kann man durch Betrachten der beide Fälle $S_T = S_{\text{up}}$ oder $S_T = S_{\text{down}}$ zwei Gleichungen mit 2 Variablen V_0 und δ herleiten, die man dann nach V_0 und δ auflösen kann.

a) Finden Sie diese beiden Gleichungen für V_0 und δ und lösen Sie sie dann nach V_0 und δ auf. Auf der slide 10 ist das $\delta = 1/2$, Sie müssen hier jetzt also mit einem allgemeinen Buchstaben δ rechnen.

b) Die Formel für V_0 lässt sich in der Form

$$V_0 \quad = \quad w_{\text{up}}\, H_{\text{up}} \;+\; w_{\text{down}}\, H_{\text{down}}$$

schreiben. Bestimmen Sie die genauen Formeln für w_{up} und w_{down} (als Funktion von $S_{\mathrm{up}}, S_{\mathrm{down}}$ und S_0) und zeigen Sie, dass

$$w_{\mathrm{up}} \;+\; w_{\mathrm{down}} \;=\; 1$$

gilt. Die Zahlen w_{up} und w_{down} könnte man also als Wahrscheinlichkeiten interpretieren, man nennt sie auch 'risikoneutrale' Wahrscheinlichkeiten im Gegensatz zu den 'real world' Wahrscheinlichkeiten p_{up} und p_{down} aus Abbildung 1, diese hat man vielleicht durch eine Zeitreihenanalyse ermittelt und sie sind für die Bestimmung des Optionspreises V_0 offensichtlich nicht erforderlich.

Aufgabe 2) Lesen Sie sich noch einmal das Theorem 3.2 aus dem week3+4 durch und erinnern Sie sich an die entsprechenden Definitionen und Notationen. Überprüfen Sie dann die Aussage des Theorems,

$$\text{Price of Option}(H) \;=\; \mathsf{E}[H]$$

für das folgende 4-Perioden Binomialmodell mit dem angegebenen Option-Payoff:

Price of Option
11.25

Realized Stock Price Path					Option Payoff
Day 0	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	
				146.41	40.00
			133.10		
		121.00		119.79	20.00
	110.00		108.90		
100.00		99.00		98.01	10.00
	90.00		89.10		
		81.00		80.19	0.00
			72.90		
				65.61	0.00

Das heisst, verifizieren Sie die Identität

$$\mathsf{E}[H] \;=\; \sum_{k=0}^{n} H(S_{k,n-k})\, B_{n,p_{\mathrm{up}}}(k) \;\stackrel{?}{=}\; 11.25$$

indem Sie in der Summe die $H(S_{k,n-k})$ und das $B_{n,p_{\mathrm{up}}}(k)$ durch konkrete Zahlen ersetzen. Der Option Payoff H ist also gegeben durch die 5 Zahlen 40, 20, 10 und die beiden Nullen.

Aufgabe 3) a) Eine faire Münze mit

$$p_{\text{Kopf}} \;=\; \tfrac{1}{2}\,, \qquad p_{\text{Zahl}} \;=\; \tfrac{1}{2}$$

wird 8 mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) genau 4 mal Kopf kommt?

(ii) höchstens 2 mal Zahl kommt?

b) Ein fairer Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 und

$$p_1 \;=\; p_2 \;=\; \cdots \;=\; p_6 \;=\; \tfrac{1}{6}$$

wird 10 mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zweimal eine 6 kommt?

Aufgabe 4) Es sei k eine binomialverteilte Zufallszahl einer Binomialverteilung mit Umfang n und Erfolgswahrscheinlichkeit p. Wir definieren die Zufallsgrösse

$$x \;:=\; \frac{k}{n}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[\,x\,] = \mathsf{E}_{n,p}[\,x\,]$ und die Varianz $\mathsf{V}[\,x\,] = \mathsf{V}_{n,p}[\,x\,]$. Verwenden Sie dazu etwa das Theorem 3.3 aus dem week3+4.

b) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{V}_{n,p}[\,x\,]$$

c) Geben wir noch eine Interpretation der Resultate aus (a) und (b) an: Eine faire Münze wird 100, 1000 oder 10000 mal geworfen. Welche Bedeutung hat dann das x? Und mit dem Resultat aus (b), was können Sie über das x sagen?

Aufgabe 5) Schauen Sie sich die slides `Poissonverteilung.pdf` von der VL-homepage an. Führen Sie dann folgende Berechnungen durch, indem Sie die in R eingebauten Wahrscheinlichkeitsverteilungen `dbinom` und `dpois` benutzen:

a) Legen Sie die Zahlen

$$n \;=\; 2.53\times 10^{18} \quad \text{und} \quad p \;=\; \frac{12}{n} \;\approx\; 4.74\times 10^{-18}$$

in R an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$B_{n,p}(k) \;=\; \binom{n}{k}\, p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k \in \{0,1,2,...,24,25\}$$

und plotten Sie das Resultat. Schauen Sie sich dazu gegebenenfalls die 3 Seiten `W'keitsverteilungen-in-R.pdf` von der VL-homepage an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P_\mu(k) \;=\; \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu} \qquad \text{für } \mu = 12 \text{ und } \quad k \in \{0,1,2,...,24,25\}$$

und plotten Sie das Resultat.

d) Plotten Sie schliesslich die Resultate aus (b) und (c) in einem Diagramm, die Binomialverteilung in schwarz und die Poisson-Verteilung in rot.

Bemerkung: Die Aufgaben 1 + 2 sind nicht klausurrelevant.