

## 2. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

**Aufgabe 1)** Es sei  $x \in \mathbb{R}$  eine beliebige Zahl. Beweisen Sie die folgende Formel mit Bleistift und Papier:

$$s_n := 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

Betrachten Sie dazu die Differenz  $x \cdot s_n - s_n$  und schreiben Sie sich die einzelnen Terme hin, die meisten kürzen sich raus.

**Aufgabe 2)** Wir wollen uns die Funktion

$$f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$$

etwas genauer anschauen, das ist also genau die Dichte der Standard-Normalverteilung bis auf den Normierungsfaktor  $1/\sqrt{2\pi}$ .

- a) Legen Sie die Funktion  $f$  als benutzerdefinierte Funktion in R an. Das können Sie etwa mit Hilfe der Syntax

```
f = function(x)
{
  result = exp(-x^2/2)
  return( result )
}
```

machen.

- b) Wir wollen die Funktion  $f$  plotten. Legen Sie dazu den Vektor

$$x = (-5.0, -4.9, -4.8, \dots, +4.8, +4.9, +5.0) =: (x_1, x_2, \dots, x_{101})$$

in R an. Dass das genau 101 Elemente sind, können Sie sich etwa auch mit dem Befehl `length(x)` anzeigen lassen.

- c) Jetzt wollen wir den Vektor

$$y := \left( f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{101}) \right)$$

berechnen. Initialisieren Sie dazu zunächst einen Vektor  $y = \text{rep}(0, 101)$ , das sind dann also einfach 101 Nullen, und benutzen Sie dann eine Schleife wie in Aufgabe 2 vom Übungsblatt 1, um die einzelnen  $y_k = f(x_k)$  zu berechnen.

- d) Anstatt das  $y$  mit einer Schleife anzulegen, können Sie auch direkt die Syntax, nehmen wir einen neuen Buchstaben  $z$ ,

$$z = f(x)$$

benutzen, Sie müssen das  $z$  dann auch nicht erst mit dem `repeat`-Befehl `rep()` initialisieren, das geht dann also deutlich schneller. Diese Logik ist grundlegende R 'vectorized calculation' logic, Funktionen können typischerweise direkt auf Vektoren und Matrizen angewendet werden, und es wird dann immer elementweise gerechnet, das ist also recht praktisch.

- e) Plotten Sie jetzt das  $y$  und das  $z$  in einem Diagramm, das  $z$  etwa in rot. Erinnern Sie sich dazu an die Syntax aus Aufgabe 4 vom Übungsblatt 1.
- f) Schliesslich wollen wir noch überprüfen, dass der Normierungsfaktor für die Dichte der Standard-Normalverteilung tatsächlich ein  $1/\sqrt{2\pi}$  ist, d.h. wir wollen das folgende Integral numerisch berechnen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \stackrel{?}{=} \sqrt{2\pi}$$

Informieren Sie sich dazu in der R-Hilfe über den `integrate()` Befehl, das können Sie etwa mit der Syntax

`?integrate()`

machen. Versuchen Sie dann, mit einem entsprechenden Befehl das angegebene Integral numerisch zu berechnen und vergleichen Sie das Resultat mit dem Wert für  $\sqrt{2\pi}$ . Der Wert von  $\pi$  ist in R in der Variablen `pi` vorimplementiert.

**Aufgabe 3)** Es sei  $F = F(k)$  oder  $F = F(x)$  eine beliebige Funktion einer diskreten oder stetigen Zufallszahl  $k$  oder  $x$ . In der Definition 2.4 in dem week2 hatten wir den Erwartungswert  $E[F]$  und die Varianz  $V[F]$  definiert.

- a) Zeigen Sie: Der Erwartungswert ist linear, für beliebige Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  und beliebige Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gilt

$$E[\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2] = \lambda_1 E[F_1] + \lambda_2 E[F_2] .$$

- b) Die Varianz ist im allgemeinen nicht linear. Verdeutlichen Sie das, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.
- c) In der Definition 2.4 hatten wir die Varianz definiert durch

$$V[F] := E[(F - E[F])^2]$$

Zeigen Sie, dass man auch die folgende äquivalente Formel zur Berechnung der Varianz benutzen kann:

$$V[F] = E[F^2] - (E[F])^2 .$$