

10. Übungsblatt zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Führen Sie die folgenden Berechnungen in R durch:

- a) Erzeugen Sie $n = 100$ mit Parameter $\lambda = 3$ Poisson-verteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in der Variablen x .
- b) Legen Sie den folgenden Vektor mit ‘Test-Lambdas’ an und nennen Sie ihn vielleicht einfach `lambda`, also

$$\lambda = (0.1, 0.2, 0.3, \dots, 9.8, 9.9, 10.0) \quad (1)$$

- c) Berechnen Sie dann für alle Lambda's λ_j aus (1) den Logarithmus der Likelihood-Funktion für Poisson-verteilte Zufallszahlen, den hatten wir im week11.pdf in der Gleichung (14) berechnet (die von λ unabhängige Konstante `const` lassen wir weg):

$$\log L(\lambda_j) := (x_1 + \dots + x_n) \log \lambda_j - n \lambda_j$$

Dabei ist dann also $n = 100$ und die x_1, \dots, x_n sind die Poisson-verteilten Zufallszahlen aus Teil (a).

- d) Plotten Sie dann die Punkte

$$(\lambda_j, \log L(\lambda_j))_{j=1}^n$$

in einem Diagramm und verifizieren Sie, dass das Maximum von $\log L(\lambda)$ an der Stelle

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

angenommen wird. Das $\hat{\lambda}_{\text{ML}}$ war der Maximum-Likelihood-Schätzer, den wir in (15) im week11.pdf berechnet hatten.

Aufgabe 2) Zufallszahlen $\{x_i\}_{i=1}^n$ heißen exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn für alle $x \geq 0$

$$\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = \lambda e^{-\lambda x} dx$$

gilt und die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen 0 ist, also $\text{Prob}[x_i \in [x, x + dx)] = 0$ falls $x < 0$. Führen Sie die folgenden Berechnungen mit Bleistift und Papier durch:

- a) Es sei x eine mit Parameter $\lambda > 0$ exponential-verteilte Zufallszahl. Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert von x gilt: $\text{E}[x] = \frac{1}{\lambda}$.

- b) Gegeben seien Zufallszahlen x_1, x_2, \dots, x_n , die durch eine Exponentialverteilung mit Parameter λ erzeugt worden sind, wir kennen jedoch den konkreten Wert für λ nicht. Wir möchten das λ mit Hilfe der Maximum Likelihood Methode schätzen. Stellen Sie dazu die Likelihood-Funktion $L = L(\lambda)$ auf. Berechnen Sie ebenfalls den Logarithmus $\log L(\lambda)$ und vereinfachen Sie das Resultat soweit wie möglich.
- c) Zeigen Sie dann, dass der Maximum Likelihood Schätzer für λ gegeben ist durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

Bestimmen Sie dazu das Maximum von $\log L(\lambda)$.