**week9: Kapitel 6: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, Teil2**

Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell war gegeben durch die Preisdynamik

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \tag{1}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und reellen Konstanten $\mu$ und $\sigma$ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Wir hatten gesehen, dass für kleine $\Delta t$ die stochastische Rekursion (1) durch den folgenden Ausdruck gelöst wird, der auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet wird:

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,x_{t_k} \;+\; \Big(\mu \,-\, \frac{\sigma^2}{2}\Big)t_k\,\Big\} \tag{2}$$

wobei das $x_{t_k}$, eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit, die folgende Kombination von standard-normalverteilten Zufallszahlen ist,

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

Wir wollen uns zunächst an das folgende Theorem erinnern, was besagt, dass die Summe von normalverteilten Zufallszahlen wieder normalverteilt ist, und was typischerweise in einer Stochastik-Vorlesung bewiesen wird. In der Stochastik II Vorlesung aus dem SS2021 wurde das etwa in dem Theorem 2.2.1 in dem week3a.pdf gemacht, `http://hsrm-mathematik.de/SS2021/semester4/Stochastik2/week3a.pdf` :

**Theorem (Summe von normalverteilten Zufallszahlen):** Es seien $\phi_1\,,\,\phi_2\,,\,\cdots\,,\,\phi_n$ normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwerten $\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\cdots\,,\,\mu_n$ und Standardabweichungen $\sigma_1\,,\,\sigma_2\,,\,\cdots\,,\,\sigma_n$ Dann gilt: Die Summe

$$\phi \;:=\; \phi_1 \,+\, \phi_2 \,+\, \cdots \,+\, \phi_n$$

ist normalverteilt mit Mittelwert

$$\mu \;=\; \mu_1 \,+\, \mu_2 \,+\, \cdots \,+\, \mu_n$$

und Varianz

$$\sigma^2 \;=\; \sigma_1^2 \,+\, \sigma_2^2 \,+\, \cdots \,+\, \sigma_n^2$$

Das heisst genauer, für eine beliebige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_1+\cdots+\phi_n)\;\prod_{k=1}^{n} e^{-\frac{(\phi_k-\mu_k)^2}{2\sigma_k^2}}\;\frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(\phi)\,e^{-\frac{(\phi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,. \tag{3}$$

Als unmittelbare Konsequenz daraus können wir zunächst mal das folgende Theorem festhalten:

**Theorem 6.3:** Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ eine Folge von unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen und

$$x_{t_k} \;=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

sei eine Brownsche Bewegung in diskreter Zeit mit $t_k = k\Delta t$. Dann gilt für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E}\big[\,f(x_{t_k})\,\big] \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2t_k}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}} \tag{4}$$

**Beweis:** Wir wenden das Theorem 2.2.1 aus der Stochastik II an mit $n = k$ und

$$\begin{aligned}\mu \;&=\; \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k\\ &=\; 0 + 0 + \cdots + 0 \;=\; 0\end{aligned}$$

und Varianz

$$\begin{aligned}\sigma^2 \;&=\; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_k^2\\ &=\; 1 + 1 + \cdots + 1 \;=\; k\end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\big[\,f(x_{t_k})\,\big] \;&=\; \int_{\mathbb{R}^k} f\Big(\sqrt{\Delta t}\,(\phi_1 + \cdots + \phi_k)\Big)\,\prod_{j=1}^{k} e^{-\frac{\phi_j^2}{2}}\,\frac{d\phi_j}{\sqrt{2\pi}}\\ &\overset{(3)}{=}\; \int_{\mathbb{R}} f\Big(\sqrt{\Delta t}\,\phi\Big)\,e^{-\frac{(\phi-0)^2}{2k}}\,\frac{d\phi}{\sqrt{2\pi k}}\\ &\overset{x:=\sqrt{\Delta t}\,\phi}{=}\; \int_{\mathbb{R}} f\big(\,x\,\big)\,e^{-\frac{x^2}{2k\Delta t}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi k\Delta t}}\\ &=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-\frac{x^2}{2t_k}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi t_k}}\end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Wir wollen jetzt das zeitdiskrete Black-Scholes Modell (1) durch ein Binomial-Modell approximieren. Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell hat die Returns

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$$

mit $\mathsf{E}[\phi_k] = 0$ und $\mathsf{V}[\phi_k] = 1$. Diese Returns wollen wir ersetzen durch Returns, die nur zwei Einstellungsmöglichkeiten $\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}$ und $\mathrm{ret}_{\mathrm{down}}$ zulassen. Die folgende Wahl bietet sich an:

$$\begin{aligned}\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} \;&:=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\\ \mathrm{ret}_{\mathrm{down}} \;&:=\; \mu\,\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \tag{5}$$

mit den Zufallszahlen

$$\varepsilon_k \;:=\; \begin{cases} +1 & \text{mit W'keit } 1/2 \\ -1 & \text{mit W'keit } 1/2 \end{cases} \tag{6}$$

Wir haben dann ebenfalls

$$\mathsf{E}[\,\varepsilon_k\,] \;=\; +1\times\frac{1}{2} \,+\, (-1)\times\frac{1}{2} \;=\; 0$$

und

$$\begin{aligned} \mathsf{V}[\,\varepsilon_k\,] \;&=\; \mathsf{E}[\,\varepsilon_k^2\,] \,-\, \big(\mathsf{E}[\varepsilon_k]\big)^2 \;=\; \mathsf{E}[\,\varepsilon_k^2\,] \\ &=\; (+1)^2\times\frac{1}{2} \,+\, (-1)^2\times\frac{1}{2} \;=\; 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten also das $N$-Perioden Binomialmodell mit Preisdynamik

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big) \tag{7}$$

Wenn sich $\ell$ up-Returns realisiert haben, ist der Preis $S_{t_N}$ gegeben durch

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0\big(\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\big)^{\ell}\big(\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,-\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\big)^{N-\ell}$$

Erwartungswerte in diesem Binomialmodell sind dann gegeben durch, das hatten wir uns schon in dem week7 klar gemacht,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \;&=\; \mathsf{E}\Big[\,f\Big(\,S_0\prod_{j=1}^{N}(1 \,+\, \mathrm{ret}_j)\,\Big)\,\Big] \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \mathsf{Prob}\big[\ \text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\ \big] \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \binom{N}{\ell} \,\times\, \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\ell}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^{N-\ell} \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \,\times\, \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \;\;=:\;\; \mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \end{aligned} \tag{8}$$

während Erwartungswerte im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \;&=\; \mathsf{E}\Big[\,f\Big(\,S_0\prod_{j=1}^{N}(1 \,+\, \mathrm{ret}_j)\,\Big)\,\Big] \\ &\overset{\Delta t\to 0}{=}\; \mathsf{E}\bigg[\,f\bigg(S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,x_{t_N} + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t_N\,\big\}\,\bigg)\,\bigg] \\ &\overset{\text{Thm 6.3}}{=}\; \int_{\mathbb{R}} f\bigg(S_0\,\exp\big\{\,\sigma x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t_N\,\big\}\,\bigg)\; e^{-\frac{x^2}{2t_N}}\;\frac{dx}{\sqrt{2\pi t_N}} \\ &=:\; \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \end{aligned} \tag{9}$$

Es gilt nun das folgende

**Theorem 6.4:** Es sei $T = t_N = N\Delta t$ ein fester Zeithorizont. Wir betrachten den Grenzwert $\Delta t \to 0$, $N \to \infty$ mit $T = N\Delta t$ fest. Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $\mathsf{E}^{\mathrm{BS}}[\,\cdot\,]$ der Erwartungswert im zeitdiskreten Black-Scholes Modell gegeben durch (9) und $\mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}[\,\cdot\,]$ sei der Erwartungswert im approximierenden Binomialmodell gegeben durch (8). Dann gilt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\, f(S_T)\,\big] \;=\; \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\, f(S_T)\,\big] \tag{10}$$

oder explizit

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{\ell=0}^{N} f(S_{N,\ell}) \times \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f\Big(S_0 \exp\big\{\,\sigma x + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})T\,\big\}\Big)\, e^{-\frac{x^2}{2T}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi T}} \tag{11}$$

mit

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\big)^{\ell}\,\big(1 + \mu\,\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}\,\big)^{N-\ell} \tag{12}$$

**Beweis:** Das approximierende Binomialmodell ist gegeben durch die Returns

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;=\; \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k$$

Wir machen zunächst einmal dieselben Umformungen wie auf den letzten beiden Seiten vom week8.pdf:

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0}\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \mathrm{ret}_{t_k}\big) \\ &= S_{t_0}\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big) \\ &= S_{t_0}\exp\Big\{\log\Big[\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big)\Big]\Big\} \\ &= S_{t_0}\exp\Big\{\sum_{k=1}^{N}\log\big[1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big]\Big\} \end{aligned} \tag{13}$$

Wir machen wieder eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)\,x^2 + O(x^3)$$

bekommen wir

$$\log[1+x] \;=\; x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

Wir ignorieren wieder Terme der Grössenordung $O(\Delta t^{3/2})$,

$$\begin{aligned} \log\big[1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\big] &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k - \frac{(\mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k)^2}{2} \\ &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\varepsilon_k^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir jetzt $\varepsilon_k = \pm 1$ so dass $\varepsilon_k^2 = 1$. Also,

$$\log\big[\,1 \,+\, \mu\,\Delta t \,+\, \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big] \;\;\approx\;\; \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k \;+\; (\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t \tag{14}$$

Die Approximation (14) setzen wir in (13) ein und bekommen die Darstellung

$$S_{t_N} \;\;\approx\;\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \;+\; (\mu - \sigma^2/2)\,N\Delta t\,\Big\} \tag{15}$$

Soweit die Analogie zum week8.pdf. Jetzt berechnen wir den Erwartungswert im Binomialmodell. Wenn wir $\ell$ up-Returns haben mit $\varepsilon_k = +1$ sind $N - \ell$ Returns down-Returns mit $\varepsilon_k = -1$. Also ist dann

$$\textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \;\;=\;\; +1 \times \ell \;+\; (-1) \times (N - \ell) \;\;=\;\; 2\ell - N \tag{16}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\big[\,f(S_{t_N})\,\big] \;\;&=\;\; \mathsf{E}\Big[\,f\big(\,S_0\,\prod_{j=1}^N (1 \,+\, \mathrm{ret}_j)\,\big)\,\Big] \\
&\overset{(15)}{\approx}\;\; \mathsf{E}\Big[\,f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \;+\; (\mu - \sigma^2/2)\,N\Delta t\,\big\}\Big)\Big] \\
&=\;\; \sum_{\ell=0}^N \mathsf{E}\Big[\,f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^N \varepsilon_k \;+\; (\mu - \sigma^2/2)T\,\big\}\Big) \,\times\, \chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)\Big] \\
&=\;\; \sum_{\ell=0}^N f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}(2\ell - N) \;+\; (\mu - \sigma^2/2)T\,\big\}\Big) \,\times\, \mathsf{Prob}\big[\,\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\,\big] \\
&=\;\; \sum_{\ell=0}^N f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}(2\ell - N) \;+\; (\mu - \sigma^2/2)T\,\big\}\Big) \,\times\, \binom{N}{\ell}\,\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\ell}\,\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{N-\ell} \\
&=\;\; \sum_{\ell=0}^N f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{T/N}(2\ell - N) \;+\; (\mu - \sigma^2/2)T\,\big\}\Big) \,\times\, \frac{1}{2^N}\binom{N}{\ell}
\end{aligned} \tag{17}$$

Jetzt benutzen wir das Resultat aus der ersten Aufgabe vom Übungsblatt 9, das ist die folgende Formel: Für ein beliebiges $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^N F\big(\tfrac{2\ell - N}{\sqrt{N}}\big) \times \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{\ell} \;\;=\;\; \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{18}$$

In unserem Fall ist das $F$ offensichtlich gegeben durch

$$F(x) \;\;:=\;\; f\Big(\,S_0\,\exp\big\{\,\sigma\,\sqrt{T}\,x \;+\; (\mu - \sigma^2/2)T\,\big\}\Big) \tag{19}$$

und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \to 0} \mathsf{E}^{\mathrm{Bin}}\big[\, f(S_{t_N})\,\big] \\
&\quad \overset{(17)}{=} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^{N} f\Big(\, S_0 \, \exp\big\{\, \sigma\, \sqrt{T/N}(2\ell - N) \; + \; (\mu - \sigma^2/2)T \,\big\}\,\Big) \; \times \; \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} \\
&\quad \overset{(19)}{=} \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{\ell=0}^{N} F\Big(\frac{2\ell - N}{\sqrt{N}}\Big) \; \times \; \frac{1}{2^N} \binom{N}{\ell} \\
&\quad \overset{(18)}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad \overset{(19)}{=} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\, S_0 \, \exp\big\{\, \sigma\, \sqrt{T}\, x \; + \; (\mu - \sigma^2/2)T \,\big\}\,\Big)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\quad = \quad \mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\, f(S_T)\,\big]
\end{aligned}
$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Als nächstes schauen wir uns dann an, wie wir diese Resultate benutzen können, um den Preis einer Option im Black-Scholes Modell zu berechnen.