week8: Kapitel 6: Das zeitdiskrete Black-Scholes Modell

Es sei S_{t_k} der Preis eines liquide handelbaren Assets zur Zeit t_k. Die Returns ret_{t_k} waren definiert durch

$$\mathrm{ret}_{t_k} \;:=\; \frac{S_{t_k} - S_{t_{k-1}}}{S_{t_{k-1}}} \tag{1}$$

so dass wir auch schreiben können

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}} \,(\, 1 + \mathrm{ret}_{t_k} \,) \tag{2}$$

Aus Gleichung (2) folgt dann durch wiederholte Anwendung oder durch Induktion die Formel

$$S_{t_N} \;=\; S_{t_0} \prod_{k=1}^{N} (\, 1 + \mathrm{ret}_{t_k} \,) \tag{3}$$

Durch Angabe der Returns $\{\mathrm{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N$ sind also die Asset-Preise $\{S_{t_k}\}_{k=1}^N$ eindeutig festgelegt. Wir wollen zunächst mal ein bischen Gefühl für die Returns von typischen Finanzzeitreihen bekommen und erinnern uns an das 10. Übungsblatt (oder auch schon an das neunte) aus der Excel/VBA-Vorlesung:

`https://hsrm-mathematik.de/SS2023/semester4/ExcelVBA/ueb10.pdf`
`https://hsrm-mathematik.de/SS2023/semester4/ExcelVBA/Loesung10.xlsm`

Wir hatten die täglichen Returns (1) und Mittelwert und Standardabweichung der täglichen Returns gegeben durch

$$\mu_{\mathrm{ret}} \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{ret}_{t_k} \tag{4}$$

$$\sigma^2_{\mathrm{ret}} \;:=\; \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \big(\, \mathrm{ret}_{t_k} - \mu_{\mathrm{ret}} \,\big)^2 \tag{5}$$

berechnet und uns dann standardisierte oder normierte Returns gegeben durch

$$\mathrm{normret}_{t_k} \;:=\; \frac{\mathrm{ret}_{t_k} - \mu_{\mathrm{ret}}}{\sigma_{\mathrm{ret}}} \tag{6}$$

angeschaut. Wir hatten ein Histogramm der standardisierten Returns gemacht und es so skaliert, dass die Fläche unter dem Histogramm gleich 1 ist. Dann hatten wir zum Vergleich die Dichte der Standard-Normalverteilung

$$\varphi(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{7}$$

in dasselbe Histogramm geplottet. Dann stellt man fest, dass die beiden Sachen nicht zu verschieden sind. Deshalb machen wir jetzt die folgende Annahme:

$$\text{normret}_{t_k} \;=\; \frac{\text{ret}_{t_k} - \mu_{\text{ret}}}{\sigma_{\text{ret}}} \;\approx\; \phi_k \quad \text{standard} - \text{normalverteilt} \tag{8}$$

oder

$$\text{ret}_{t_k} \;=\; \mu_{\text{ret}} + \sigma_{\text{ret}}\,\phi_k \tag{9}$$

mit reellen Konstanten μ_{ret} und σ_{ret} und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$. Wieder durch eine reine Datenanalyse hatten wir dann das folgende Skalierungs-Verhalten festgestellt:

$$\begin{aligned} \mu_{\text{ret}} &\sim \Delta t \\ \sigma_{\text{ret}} &\sim \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

so dass man etwa schreiben kann

$$\mu_{\text{ret}} \;=\; \mu\,\Delta t \tag{10}$$

$$\sigma_{\text{ret}} \;=\; \sigma\,\sqrt{\Delta t} \tag{11}$$

mit neuen Konstanten μ und σ. Setzen wir (10,11) in (9) ein und Gleichung (9) dann in Gleichung (2), erhalten wir das zeitdiskrete Black-Scholes Modell, gegeben durch folgende Gleichung (12):

Definition 6.1: Eine Preisdynamik gegeben durch

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \tag{12}$$

mit reellen Konstanten μ und σ und unabhängigen, standard-normalverteilten Zufallszahlen $\{\phi_k\}_{k=1}^N$ wird als das zeitdiskrete **Black-Scholes Modell** bezeichnet. Der Parameter μ heisst auch Drift-Parameter und das σ wird als Volatilität oder auch Diffusionsparameter bezeichnet.

In der restlichen Veranstaltung heute wollen wir jetzt noch das Skalierungverhalten (11), die Standardabweichungen sind proportional zu $\sqrt{\Delta t}$ und nicht zu Δt, mathematisch etwas plausibilisieren, also nicht durch eine Datenanalyse. Wir starten mit Gleichung (3) mit den Returns für das zeitdiskrete Black-Scholes Modell:

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0}\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \text{ret}_{t_k}\big) \\ &= S_{t_0}\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big) \\ &= S_{t_0}\exp\Big\{\log\Big[\prod_{k=1}^{N}\big(1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big)\Big]\Big\} \\ &= S_{t_0}\exp\Big\{\sum_{k=1}^{N}\log\big[1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\big]\Big\} \end{aligned} \tag{13}$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung für $f(x) := \log[1+x]$ mit $x := \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k$. Mit der allgemeinen Formel

$$f(x) \;=\; f(0) \,+\, f'(0)\,x \,+\, \frac{1}{2}\,f''(0)\,x^2 \,+\, O(x^3)$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \log[1+x] &= \log[1] \,+\, \frac{1}{1+0}\,x \,+\, \frac{1}{2}\,\frac{-1}{(1+0)^2}\,x^2 \,+\, O(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} \,+\, O(x^3) \end{aligned}$$

Also, wenn wir Terme der Grössenordung $O(\Delta t^{3/2})$ ignorieren,

$$\begin{aligned} \log\big[\, 1 + \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k \,\big] &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k - \frac{(\mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k)^2}{2} \\ &\approx \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\phi_k^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Approximation (14) setzen wir in (13) ein und bekommen die Darstellung

$$\begin{aligned} S_{t_N} &\approx S_{t_0}\,\exp\Big\{ \sum_{k=1}^{N} \Big[\, \mu\,\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\phi_k^2 \,\Big] \Big\} \\ &= S_{t_0}\,\exp\Big\{ \mu\,N\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N}\phi_k - \frac{\sigma^2}{2}\,\Delta t\,\sum_{k=1}^{N}\phi_k^2 \Big\} \end{aligned} \tag{15}$$

Durch diese Darstellung wird nahegelegt, die folgenden Grössen einzuführen, etwa für beliebiges $k \in \{1,2,\cdots,N\}$

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j \tag{16}$$

$$I_{t_k} \;:=\; \Delta t\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j^2 \tag{17}$$

Dann bekommen wir die folgenden Varianzen:

$$\mathsf{V}[\,x_{t_k}\,] \;=\; (\sqrt{\Delta t})^2\sum_{j=1}^{k}\mathsf{V}[\,\phi_j\,] \;=\; \Delta t\sum_{j=1}^{k}1 \;=\; k\Delta t \;=\; t_k \tag{18}$$

$$\mathsf{V}[\,I_{t_k}\,] \;=\; (\Delta t)^2\sum_{j=1}^{k}\mathsf{V}[\,\phi_j^2] \;=\; (\Delta t)^2\sum_{j=1}^{k}(3-1) \;=\; 2k(\Delta t)^2 \;=\; 2t_k\,\Delta t \;\to\; 0 \tag{19}$$

Und wegen $\mathsf{E}[\,I_{t_k}\,] = k\Delta t = t_k$ sieht die Darstellung (15) dann so aus:

$$\begin{aligned} S_{t_N} &= S_{t_0}\,\exp\Big\{ \mu\,t_N + \sigma\,x_{t_N} - \frac{\sigma^2}{2}\,I_{t_N} \Big\} \\ &\overset{\Delta t\to 0}{\approx} S_{t_0}\,\exp\Big\{ \mu\,t_N + \sigma\,x_{t_N} - \frac{\sigma^2 t_N}{2} \Big\} \end{aligned} \tag{20}$$

Wenn wir nun in Gleichung (11) geschrieben hätten $\sigma_{\rm ret} = \sigma\Delta t$ oder etwas allgemeiner

$$\sigma_{\rm ret} \;=\; \sigma\,\Delta t^{\alpha}$$

mit einem $\alpha > 1/2$, dann würde in Gleichung (18) die Varianz der x_{t_k} nach 0 konvergieren, so dass dann auch die Grössen x_{t_k} im Limes $\Delta t \to 0$ deterministisch werden würden, genauer, nach 0 konvergieren würden. Das heisst also, für kleine Δt würde der Preisprozess $\{S_{t_k}\}_{k=1}^{N}$ dann völlig deterministisch werden, da wäre nichts mehr stochastisch und das macht dann natürlich keinen Sinn mehr.

Definition 6.2: Es seien $\{\phi_k\}_{k=1}^{N}$ unabhängige, standard-normalverteilte Zufallszahlen. Dann heisst die Kombination von Zufallszahlen (16),

$$x_{t_k} \;:=\; \sqrt{\Delta t}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

eine Brownsche Bewegung und der Preisprozess (20),

$$S_{t_k} \;:=\; S_{t_0}\,\exp\Bigl\{\,\mu\,t_k \,+\, \sigma\,x_{t_k} \,-\, \frac{\sigma^2 t_k}{2}\,\Bigr\}$$

wird auch als geometrische Brownsche Bewegung oder als das Black-Scholes Modell bezeichnet.