week7: Kapitel 5: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, Teil2

Wir betrachten jetzt eine pfadunabhängige Option mit Auszahlungsfunktion

$$H \;=\; H(S_N)$$

und werden dann sehen, dass wir die allgemeine Pricing-Formel vom letzten Mal in einen deutlich expliziteren Ausdruck umschreiben können, nämlich in

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell}\, p_{\mathrm{rn}}^{\ell}\, (1-p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell}$$

wobei die $S_{N,\ell}$'s gegeben sind durch

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0\,(1+\mathrm{ret_{up}})^{\ell}\,(1+\mathrm{ret_{down}})^{N-\ell}$$

Schauen wir uns das jetzt genauer an: Nach Voraussetzung ist der Preisprozess gegeben durch ein N-Perioden Binomialmodell,

$$S_k \;=\; S_{k-1} \times \begin{cases} (1+\mathrm{ret_{up}}) & \text{with some probability } \; p \\ (1+\mathrm{ret_{down}}) & \text{with probability } \; 1-p \end{cases}$$

Wenn wir nach k Perioden bei Zeit k oder t_k sind, haben sich k Returns

$$\mathrm{ret}_1, \cdots, \mathrm{ret}_k \;\in\; \{\mathrm{ret_{up}}, \mathrm{ret_{down}}\}$$

realisiert und den aktuellen Underlyingpreis S_k können wir schreiben als

$$\begin{aligned} S_k \;&=\; S_{k-1}\,(1+\mathrm{ret}_k) \\ &=\; S_{k-2}\,(1+\mathrm{ret}_{k-1})\,(1+\mathrm{ret}_k) \\ &\;\vdots \\ &=\; S_1\,(1+\mathrm{ret}_2)\cdots(1+\mathrm{ret}_{k-1})\,(1+\mathrm{ret}_k) \\ &=\; S_0\,(1+\mathrm{ret}_1)\,(1+\mathrm{ret}_2)\cdots(1+\mathrm{ret}_{k-1})\,(1+\mathrm{ret}_k) \\ &=\; S_0\,\prod_{j=1}^{k}(1+\mathrm{ret}_j) \end{aligned}$$

Die ret_j sind entweder up-returns oder down-returns. Nehmen wir an, dass wir ℓ up-returns haben, dann müssen die restlichen $k-\ell$ Returns also down-returns sein. Wenn die Anzahl der up-returns festgelegt ist, spielt es keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt diese Returns auftreten, der Underlyingpreis ist dann immer gegeben durch

$$\begin{aligned} S_k &= S_0 \prod_{j=1}^{k} (1 + \text{ret}_j) \overset{\ell\ \text{up-returns}}{=} S_0\,(1 + \text{ret}_{\text{up}})^{\ell}\,(1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell} \\ &=: S_{k,\ell} \end{aligned}$$

In dem Theorem 5.1 konnten wir nun eine Wahrscheinlichkeit

$$p \;=\; p_{\text{rn}} \;=\; \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

angeben, die es ermöglicht, den Preis V_0 der Option $H = H(S_N)$ in folgender Weise zu schreiben:

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N}\,\mathsf{E}_{\text{rn}}\big[\,H(S_N)\,\big]$$

Den Erwartungswert in dieser Formel können wir jetzt folgendermassen berechnen: Es sei $\chi(A)$ die Indikatorfunktion, definiert durch (A ist eine beliebige logische Aussage)

$$\chi(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } A = \text{True} \\ 0 & \text{falls } A = \text{False} \end{cases}$$

Wenn wir N up- oder down-Returns haben, sind davon entweder $0, 1, 2, ...$ oder N up-Returns. Also können wir schreiben:

$$1 \;=\; \sum_{\ell=0}^{N} \chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)$$

und bekommen dann für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\text{rn}}\big[\,H(S_N)\,\big] &= \mathsf{E}_{\text{rn}}\Big[\,H\big(\,S_0 \prod_{j=1}^{N}(1 + \text{ret}_j)\big)\,\Big] \\ &= \mathsf{E}_{\text{rn}}\Big[\textstyle\sum_{\ell=0}^{N} \chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)\; H\big(\,S_0 \displaystyle\prod_{j=1}^{N}(1 + \text{ret}_j)\big)\,\Big] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} \mathsf{E}_{\text{rn}}\Big[\,H\big(\,S_0 \prod_{j=1}^{N}(1 + \text{ret}_j)\big)\; \chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)\,\Big] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} \mathsf{E}_{\text{rn}}\Big[\,H(S_{N,\ell})\; \chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)\,\Big] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell})\; \mathsf{E}_{\text{rn}}\Big[\,\chi\big(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big)\,\Big] \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \;\times\; \mathsf{Prob}\big[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\big] \end{aligned}$$

Es gibt einen up-return mit Wahrscheinlichkeit p_{rn}. Die Wahrscheinlichkeit, dass etwa die ersten ℓ Returns up-returns sind und die nächsten $N-\ell$ Returns down-returns sind, ist dann gegeben durch

$$p_{\text{rn}}^{\ell} \;\times\; (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$$

Jetzt müssen aber nicht die ersten ℓ Returns die up-returns sein, sondern es können irgendwelche der N Returns die ℓ up-returns sein. Jede solche Auswahl von ℓ up-returns aus den N Returns liefert einen Beitrag $p_{\rm rn}^{\ell} \times (1-p_{\rm rn})^{N-\ell}$ zur Wahrscheinlichkeit. Jetzt muss man sich nur noch überlegen, auf wieviele Art und Weisen man aus N Returns, oder aus N Plätzen

$$1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,N$$

eine Anzahl von ℓ Plätze auswählen kann. Das ist wie Ziehung der Lottozahlen, da gibt es 49 über 6 Möglichkeiten oder allgemein dann also

$$\binom{N}{\ell} \;=\; \frac{N!}{\ell!\,(N-\ell)!} \;=\; \frac{N(N-1)\cdots(N-\ell+1)}{1\cdot 2\cdots \ell}$$

Möglichkeiten. Also bekommen wir

$$\mathsf{Prob}\big[\,\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}\,\big] \;=\; \binom{N}{\ell} \times p_{\rm rn}^{\ell} \times (1-p_{\rm rn})^{N-\ell}$$

und für den Erwartungswert $\mathsf{E}_{\rm rn}\big[\,H(S_N)\,\big]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathsf{E}_{\rm rn}\big[\,H(S_N)\,\big] \;&=\; \mathsf{E}_{\rm rn}\Big[\,H\big(\,S_0\,\textstyle\prod_{j=1}^{N}(1\,+\,\mathrm{ret}_j)\,\big)\,\Big] \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \,\times\, \mathsf{Prob}\Big[\,\ell \text{ out of } N \text{ returns are up returns}\,\Big] \\ &=\; \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \,\times\, \binom{N}{\ell} \,\times\, p_{\rm rn}^{\ell}\,(1-p_{\rm rn})^{N-\ell} \end{aligned}$$

Damit haben wir dann das folgende Theorem 5.2 bewiesen:

Theorem 5.2: Consider a price process $S_k = S(t_k)$ given by a Binomial model with returns $\mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\rm up}, \mathrm{ret}_{\rm down}\}$ and let r denote the interest rate per period. Let $p_{\rm rn}$ be the risk neutral probability given by

$$p_{\rm rn} \;=\; \tfrac{r\,-\,\mathrm{ret}_{\rm down}}{\mathrm{ret}_{\rm up}\,-\,\mathrm{ret}_{\rm down}}$$

Let

$$H \;=\; H(S_N)$$

be the payoff of some path independent option which depends on the underlying at maturity only. Then the time zero theoretical fair value V_0 of this option can be written as

$$V_0 \;=\; (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \,\times\, \binom{N}{\ell}\, p_{\rm rn}^{\ell}\,(1-p_{\rm rn})^{N-\ell} \tag{1}$$

with

$$S_{N,\ell} \;=\; S_0\,(1\,+\,\mathrm{ret}_{\rm up})^{\ell}\,(1\,+\,\mathrm{ret}_{\rm down})^{N-\ell}\;\;.$$

Machen wir noch ein kleines Beispiel als consistency-check:

Beispiel: Nehmen wir an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Betrachten wir den pfadunabhängigen Payoff

$$H(S_N) \;=\; S_N$$

Man bekommt also einfach den Wert des Underlyings bei Fälligkeit oder Maturity t_N oder nach N Perioden ausbezahlt. Diese Auszahlung kann man garantieren, wenn man zum Zeitpunkt t_0, bei Start der Option, einfach das Underlying kauft, das kostet dann S_0. Man hat also $\delta_0 = 1$, man käuft 1 Stück vom Underlying, und hält das ganz einfach bis Fälligkeit. In diesem Fall muss man also das Hedge-Portfolio nicht nach jeder Periode anpassen, sondern man hat für alle delta's

$$\delta_0 \;=\; \delta_1 \;=\; \cdots \; \delta_{N-1} \;=\; 1 \;\;,$$

da ändert sich nichts. Man sagt auch, man hat einen statischen Hedge. Der Preis der Option H, das ist also das Geld, was man braucht, um diese Handelsstrategie machen zu können, ist dann offensichtlich

$$V_0 \;=\; S_0 \;,$$

soviel Geld braucht man ja am Anfang, um das Underlying kaufen zu können, und der Wert des replizierenden Portfolios zur Zeit t_N ist dann

$$\begin{aligned}
V_N \;&=\; V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1}) \\
&=\; S_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} 1 \cdot (S_k - S_{k-1}) \\
&=\; S_0 \;+\; S_N - S_0 \;=\; S_N \;=\; H(S_N)
\end{aligned}$$

also der Option-Payoff.

Checken wir jetzt, dass wir dasselbe Resultat, $V_0 = S_0$, erhalten, wenn wir die Formel aus dem Theorem 3.2 anwenden: Wir bekommen mit $r = 0$ und $H(S_N) = S_N$

$$\begin{aligned}
V_0 \;&=\; e^{-rt_N} \times \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell}\, p_{\mathrm{rn}}^{\ell}\, (1 - p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell} \\
&=\; \sum_{\ell=0}^{N} S_{N,\ell} \times \binom{N}{\ell}\, p_{\mathrm{rn}}^{\ell}\, (1 - p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell} \\
&=\; \sum_{\ell=0}^{N} S_0\, (1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{up}})^{\ell}\, (1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{down}})^{N-\ell} \times \binom{N}{\ell}\, p_{\mathrm{rn}}^{\ell}\, (1 - p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell} \\
&=\; S_0 \sum_{\ell=0}^{N} \binom{N}{\ell} \big[p_{\mathrm{rn}}(1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{up}})\big]^{\ell} \big[(1 - p_{\mathrm{rn}})(1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{down}})\big]^{N-\ell}
\end{aligned}$$

Mit der binomischen Formel

$$(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\; a^k\, b^{n-k}$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
V_0 \;&=\; S_0 \left\{ \big[p_{\rm rn}(1\,+\,\mathrm{ret}_{\rm up})\big] \;+\; \big[(1-p_{\rm rn})(1\,+\,\mathrm{ret}_{\rm down})\big] \right\}^N \\
&=\; S_0 \left\{ p_{\rm rn} + 1 - p_{\rm rn} \;+\; p_{\rm rn}\,\mathrm{ret}_{\rm up} \;+\; (1-p_{\rm rn})\,\mathrm{ret}_{\rm down} \right\}^N \\
&=\; S_0 \left\{ 1 \;+\; p_{\rm rn}\,\mathrm{ret}_{\rm up} \;+\; (1-p_{\rm rn})\,\mathrm{ret}_{\rm down} \right\}^N \\
&=\; S_0 \left\{ 1 \;+\; 0 \right\}^N \;=\; S_0
\end{aligned}$$

denn

$$p_{\rm rn}\,\mathrm{ret}_{\rm up} \;+\; (1-p_{\rm rn})\,\mathrm{ret}_{\rm down} \;=\; \frac{-\,\mathrm{ret}_{\rm down}}{\mathrm{ret}_{\rm up}\;-\;\mathrm{ret}_{\rm down}}\,\mathrm{ret}_{\rm up} \;+\; \frac{\mathrm{ret}_{\rm up}}{\mathrm{ret}_{\rm up}\;-\;\mathrm{ret}_{\rm down}}\,\mathrm{ret}_{\rm down} \;=\; 0\;.$$

Damit haben wir die explizite Pricing-Formel (1) also für diesen einfachen Fall nochmal gecheckt.