Week3: Kapitel 3: Diskrete und stetige Verzinsung, Handelsstrategien bei stetiger Verzinsung

Letztes Mal hatten wir das elementare, aber sehr zentrale Theorem 2.1 bewiesen, das war die folgende Sache:

Wir betrachten eine Handelsstrategie mit N Handelszeitpunkten

$$t_0\ ,\ t_1\ ,\ t_2\ ,\ \cdot\ ,\ t_{N-1}\ ,\ t_N$$

Zum Zeitpunkt t_0 haben wir ein Startkapital V_0. Wir handeln mit einem Underlying S, etwa eine Aktie, welche am Ende vom Tag t_k den Preis $S_k = S(t_k)$ habe. Wir verfolgen folgende Handelsstrategie:

- Am Ende vom Tag t_0 kaufen wir δ_0 Aktien zum Preis S_0.
- Am Ende vom Tag t_1 verkaufen wir die δ_0 Aktien vom Vortag und kaufen δ_1 neue, beides zum Preis S_1.
- Allgemein: Am Ende vom Tag t_k verkaufen wir die δ_{k-1} Aktien vom Vortag und kaufen δ_k neue, beides zum Preis S_k. Am Ende vom Tag t_k halten wir also δ_k Aktien.
- Am Ende vom Tag t_N wird die Position geschlossen, wir verkaufen die δ_{N-1} Aktien vom Vortag, zum Preis S_N, und kaufen keine neuen mehr.

Dann gilt das folgende

Theorem 2.1: Wir verfolgen eine Handelsstrategie wie oben beschrieben.

a) Die Zinsen seien null. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag

$$V_N \;=\; V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(S_k - S_{k-1})$$

generiert.

b) Die Zinsen r seien jetzt ungleich null. Wir nehmen an, dass ein Geldbetrag G in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht}\\ \text{von } \mathrm{t_{k-1}} \text{ nach } \mathrm{t_k}}}{\longrightarrow} \quad G(1+r)$$

verzinst wird. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag

$$V_N \;=\; (1+r)^N\, v_N$$

generiert, wobei v_N gegeben ist durch

$$v_N \;=\; v_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

mit den diskontierten Grössen

$$\begin{aligned} s_k &:= (1+r)^{-k}\, S_k \\ v_k &:= (1+r)^{-k}\, V_k \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $v_0 = V_0$, das war das Startkapital.

In Teil (b) hatten wir angenommen, dass ein Geldbetrag G in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von } t_{k-1} \text{ nach } t_k}}{\longrightarrow} \quad G(1+r)$$

verzinst wird. In diesem Zusammenhang wollen wir uns kurz anschauen, wie Geldbeträge typischerweise verzinst werden können. Dazu machen wir die folgende Übungsaufgabe:

Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von $T = 10$ Jahren und wir nehmen an, dass der jährliche Zinssatz bei $r = 5\%$ liegt. Ein Start-Kapital von 100 Euro soll verzinst werden. Wie gross ist das End-Kapital nach 10 Jahren bei

a) jährlicher

b) halbjährlicher

c) vierteljährlicher

d) monatlicher

e) stetiger

Verzinsung?

Lösung: Es sei also r der jährliche Zinssatz und $G = 100$ Euro ist das Startgeld. Bei jährlicher Verzinsung ergeben sich dann die folgenden Geldbeträge:

$$\begin{array}{rcl} 100 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von 0 nach 1 Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%) \\ 100\,(1+5\%) & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{von 1 Jahr nach 2 Jahren}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^2 \\ 100\,(1+5\%)^2 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{vom 2. Jahr zum 3. Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)^2\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^3 \\ & \vdots & \\ 100\,(1+5\%)^9 & \overset{\substack{\text{die Zeit vergeht} \\ \text{vom 9. Jahr zum 10. Jahr}}}{\longrightarrow} & 100\,(1+5\%)^9\,(1+5\%) \;=\; 100\,(1+5\%)^{10} \;\approx\; 162.89 \end{array}$$

Betrachten wir jetzt halbjährliche Verzinsung. Wenn man sagt, dass man einen jährlichen Zinssatz von 5% hat und man halbjährlich verzinsen möchte, dann meint das, dass man immer nach einem halben Jahr einen Zins von 2.5% anwendet. Also bekommt man folgende Geldbeträge:

$$\begin{array}{rcrcl}
100 & \xrightarrow[\text{von 0 nach 0.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%) & & \\
100\,(1+2.5\%) & \xrightarrow[\text{von 0.5 Jahren nach 1 Jahr}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)\,(1+2.5\%) & = & 100\,(1+2.5\%)^2 \\
100\,(1+2.5\%)^2 & \xrightarrow[\text{von 1 Jahr nach 1.5 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)^2\,(1+2.5\%) & = & 100\,(1+2.5\%)^3 \\
 & \vdots & & & \\
100\,(1+2.5\%)^{19} & \xrightarrow[\text{von 9.5 Jahren nach 10 Jahren}]{\text{die Zeit vergeht}} & 100\,(1+2.5\%)^{19}\,(1+2.5\%) & = & 100\,(1+2.5\%)^{20} \\
 & & & \approx & 163.86
\end{array}$$

Bei vierteljährlicher Verzinsung haben wir dann also 40 Zinsperioden, in denen dann jeweils der Zinssatz von

$$r/4 \;=\; 5\%/4 \;=\; 1.25\%$$

anzuwenden ist. Also bekommen wir den Betrag

$$100\,(1+1.25\%)^{40} \;\approx\; 164.36$$

Und bei monatlicher Verzinsung haben wir 12 Zinsperioden pro Jahr, 120 in 10 Jahren, in denen jeweils der Zinssatz von $r/12 = 5\%/12$ anzuwenden ist. Das liefert

$$100\left(1 + \tfrac{5\%}{12}\right)^{10\times 12} \;\approx\; 164.70$$

Bei n Zinsperioden pro Jahr ergibt sich also nach T Jahren ein Endbetrag G_T gegeben durch

$$G_T \;=\; G_0\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^{T\times n}$$

Stetige Verzinsung ist dann einfach der Limes $n \to \infty$ von der obigen Formel. Wir erinnern uns kurz an die Analysis I:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \;=\; e^x$$

Also bekommen wir im Falle von stetiger Verzinsung:

$$\begin{aligned}
G_T \;&=\; \lim_{n\to\infty} G_0\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^{T\times n} \\
&=\; G_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \tfrac{r}{n}\right)^n\right\}^T \\
&=\; G_0\, e^{rT}
\end{aligned}$$

In unserem konkreten Fall:

$$G_T \;=\; e^{0.05\times 10} \;=\; e^{0.5} \;\approx\; 164.87$$

In dieser Vorlesung werden wir im weiteren Verlauf immer mit stetiger Verzinsung rechnen. Das heisst also, wenn ein Geldbetrag für ein Zeitraum $t_k - t_{k-1}$ verzinst werden soll, dann ist ein Faktor von $e^{r(t_k - t_{k-1})}$ anzuwenden. Schreiben wir den Teil (b) des Theorems 2.1 noch einmal explizit für den Fall stetiger Verzinsung hin:

Theorem 3.1 (stetige Verzinsung): Wir verfolgen eine Handelsstrategie wie oben beschrieben. Die Zinsen r seien ungleich null und wir nehmen stetige Verzinsung an. Das heisst, ein Geldbetrag G wird in jeder Handelsperiode von t_{k-1} nach t_k gemäss

$$G \quad \overset{\text{die Zeit vergeht}}{\xrightarrow{\text{von } t_{k-1} \text{ nach } t_k}} \quad G\, e^{r(t_k - t_{k-1})}$$

verzinst. Dann gilt: Durch eine solche Handelsstrategie wird bei Zeit t_N der Betrag (es sei $t_0 := 0$)

$$V_N \;=\; e^{rt_N}\, v_N$$

generiert, wobei $v_N = e^{-rt_N} V_N$ gegeben ist durch

$$v_N \;=\; v_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

mit den diskontierten Grössen

$$\begin{aligned} s_k \;&:=\; e^{-rt_k}\, S_k \\ v_k \;&:=\; e^{-rt_k}\, V_k \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $v_0 = V_0$, das war das Startkapital.

Nächste Woche kommen wir dann zu dem sehr zentralen Kapitel 4, das N-Perioden Binomialmodell, wo wir uns dann anschauen werden, wie man zu einer gegebenen Optionsauszahlung $H = H(S_0, S_1, \cdots, S_N)$ oder auch nur $H = H(S_N)$ eine geeignete Handelsstrategie so upsetten kann (das heisst mathematisch, die δ_k und ein V_0 so bestimmen kann), so dass am Ende die Optionsauszahlung generiert worden ist,

$$\begin{aligned} H(S_0, S_1, \cdots, S_N) \;=\; V_N \;&=\; e^{rt_N} \left\{ v_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1}) \right\} \\ &=\; e^{rt_N} \left\{ V_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}\big(e^{-rt_k} S_k \,-\, e^{-rt_{k-1}} S_{k-1} \big) \right\} \end{aligned}$$

ganz egal, welcher Preispfad $\{S_0, S_1, \cdots, S_N\}$ sich konkret realisiert hat. Oder etwas kompakter,

$$h \;=\; v_N \;=\; v_0 \,+\, \sum_{k=1}^{N} \delta_{k-1}(s_k - s_{k-1})$$

wenn wir etwa einen diskontierten Payoff h definieren durch

$$h(S_0, S_1, \cdots, S_N) \;:=\; e^{-rt_N} H(S_0, S_1, \cdots, S_N)\,.$$