week10: Kapitel 7: Die Black-Scholes Formeln, Teil1

Wir wollen uns jetzt überlegen, wie man Optionspreise im Black-Scholes Modell berechnen kann. Die grundlegende Optionspreislogik war ja, dass wir einen eindeutig bestimmten Geldbetrag V_0 bestimmen können, das ist dann der Optionspreis, und eine Handelsstrategie $\{\delta_k\}_{k=0}^{N-1}$ angeben können, so dass, egal, ob der der Option zu Grunde liegende Basiswert S_t steigt, fällt, oder neutral bleibt, die Handelsstrategie am Ende immer die Optionsauszahlung $H(S_T)$ generieren tut.

Eine wesentliche Voraussetzung, dass man eine solche Handelsstrategie angeben kann, war allerdings, dass von einem Handelszeitpunkt zum nächsten das Underlying immer nur zwei verschiedene Werte annehmen darf, also das Ganze funktioniert zunächst mal nur in einem Binomialmodell. Deshalb hatten wir uns dann in der letzten Veranstaltung überlegt, wie man ein Black-Scholes Modell, was ja von einem Zeitpunkt zum nächsten ein ganzes Kontinuum an möglichen Preisen zulässt, durch ein geeignetes Binomialmodell approximieren kann. Wir hatten dann gesehen, dass man das machen kann, wenn man die folgenden Einstellungmöglichkeiten für die up- und down-Return wählt:

$$\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

$$\mathrm{ret}_{\mathrm{down}} = \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \tag{2}$$

Jetzt wissen wir aber, wie wir im Binomialmodell Optionspreise berechnen können. Für eine pfadunabhängige Option mit Payoff $H(S_T)$ hatten wir dazu im Theorem 5.2 aus dem week7.pdf die folgende Formel hergeleitet:

Theorem 5.2: Consider a price process $S_k = S(t_k)$ given by a Binomial model with returns $\mathrm{ret}_k \in \{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}}, \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}\}$ and let r denote the interest rates paid per period. Let p_{rn} be the risk neutral probability given by

$$p_{\mathrm{rn}} = \frac{r - \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}}{\mathrm{ret}_{\mathrm{up}} - \mathrm{ret}_{\mathrm{down}}} \tag{3}$$

Let

$$H = H(S_N)$$

be the payoff of some path independent option which depends on the underlying at maturity only. Then the time zero theoretical fair value V_0 of this option can be written as

$$V_0 = (1+r)^{-N} \times \sum_{\ell=0}^{N} H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{\mathrm{rn}}^{\ell} (1-p_{\mathrm{rn}})^{N-\ell} \tag{4}$$

with

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{up}})^{\ell} (1 + \mathrm{ret}_{\mathrm{down}})^{N-\ell} \; .$$

Also, alles, was wir jetzt machen müssen, ist, die Werte für die Returns (1,2) in die Formeln (3) und (4) einzusetzen, und dann den Limes $\Delta t \to 0$ zu berechnen mit $T = N\Delta t$ fest, also $N = T/\Delta t \to \infty$. Der Zinssatz pro Periode wäre dann $r\Delta t$ wenn etwa r einen jährlichen Zins bezeichnet und Δt in year fraction angegeben ist. Man bekommt dann das folgende Resultat, die grundlegende Pricing-Formel für pfadunabhängige Optionen im Black-Scholes Modell:

Theorem 7.1: Consider a Binomial model with returns (1,2) which converges to the Black-Scholes model $S_t = S_0\, e^{\sigma x_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$ with real world drift parameter μ. Let V_0^{Bin} be the theoretical fair value of some european option $H = H(S_T)$ in the Binomial model given by equation (4) above with r replaced by $r\Delta t$ and risk neutral probability given by equation (3) above. Then

$$\lim_{\Delta t \to 0} V_0^{\text{Bin}} \;=\; V_0^{\text{BS}} \tag{5}$$

where the theoretical fair value under the Black-Scholes model is given by

$$V_0^{\text{BS}} \;=\; e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H\big(\, S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}x + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} \,\big)\; e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\;\; . \tag{6}$$

Bevor wir uns den Beweis anschauen, machen wir noch die folgende

Bemerkung: With rates per period given by $r\Delta t$ the risk neutral probability is

$$p_{\text{rn}} \;=\; \frac{r\Delta t - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \tag{7}$$

and with returns given by (1,2),

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \\ \text{ret}_{\text{down}} &= \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

this becomes

$$p_{\text{rn}} \;=\; \frac{(r-\mu)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \;=\; \frac{1 + \frac{r-\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t}}{2} \tag{8}$$

To obtain the option price under the Black-Scholes model, we have to calculate the $\Delta t \to 0$ limit of (4). A naive guess could be that the risk neutral probabilities converge actually to 1/2 and then (4) should coincide with the limit of the 'real world expectation value'

$$\mathsf{E}^{\text{Bin}}\big[\, H(S_t)\,\big] \;=\; \sum_{\ell=0}^{N} H\Big(S_0(1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})^{\ell}(1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})^{N-\ell}\Big) \times \tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{\ell} \tag{9}$$

and this expression, accoring to Theorem 6.4 from the last lecture, converges to the real world Black-Scholes expectation value

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}^{\mathrm{BS}}\big[\,H(S_t)\,\big] &= \int_{\mathbb{R}} H\Big(S_0\, e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t\,+\,\sigma x}\Big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} H\Big(S_0\, e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t\,+\,\sqrt{t}\,\sigma x}\Big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \qquad (10)
\end{aligned}$$

which has a μ in the exponent of the e-function inside the H. If this would be true, it would be actually quite bad since in that case the option price would depend on the drift parameter μ and this parameter is basically not predictable. Knowing μ is basically equivalent to knowing whether the underlying is going up or down, this is not predictable.

Fortunately the above reasoning is too crude, the limit is more subtle. The $\sqrt{\Delta t}$-term in the risk neutral probabilities is actually highly important and it has the effect that in the continuous time limit the drift parameter μ completely drops out of the pricing formula, it is simply substituted by the interest rate parameter r as it can be seen in the correct limit given by formula (6) above.

Beweis Theorem 7.1: Zunächst mal schreiben wir wie in week9.pdf

$$\begin{aligned}
S_{t_N} &= S_{t_0}\,\prod_{k=1}^{N}\big(\,1\,+\,\mathrm{ret}_{t_k}\,\big) \\
&= S_{t_0}\,\prod_{k=1}^{N}\big(\,1\,+\,\mu\,\Delta t\,+\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big) \\
&= S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\log\Big[\,\prod_{k=1}^{N}\big(\,1\,+\,\mu\,\Delta t\,+\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big)\,\Big]\,\Big\} \\
&= S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sum_{k=1}^{N}\log\big[\,1\,+\,\mu\,\Delta t\,+\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_k\,\big]\,\Big\}
\end{aligned}$$

und mit der Taylor-Entwicklung vom Logarithmus dann

$$S_{t_N} \;\approx\; S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\;+\;(\mu-\sigma^2/2)\,N\Delta t\,\Big\}$$

Um auf $S_{N,\ell}$ zu kommen, brauchen wir genau ℓ up-Returns mit $\varepsilon_k = +1$ und $N-\ell$ down-Returns mit $\varepsilon_k = -1$, also

$$\textstyle\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k \;=\; +1\times\ell\;+\;(-1)\times(N-\ell) \;=\; 2\ell-N$$

und wir bekommen, das hatten wir auch schon im week9 gemacht,

$$\begin{aligned}
S_{N,\ell} &= S_0\,(1\,+\,\mathrm{ret_{up}})^{\ell}\,(1\,+\,\mathrm{ret_{down}})^{N-\ell} \\
&\approx S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,\sqrt{\Delta t}\,(2\ell-N)\;+\;(\mu-\sigma^2/2)\,N\Delta t\,\Big\} \\
&\approx S_{t_0}\,\exp\Big\{\,\sigma\,\sqrt{T}\,\tfrac{2\ell-N}{\sqrt{N}}\;+\;(\mu-\sigma^2/2)\,T\,\Big\}
\end{aligned}$$

Jetzt bringen wir die risikoneutralen W'keiten ins Spiel: Abbreviating

$$\alpha \;:=\; \frac{r-\mu}{\sigma} \tag{11}$$

the risk neutral probability (8) is written as

$$p_{\rm rn} \;=\; \frac{1+\alpha\sqrt{\Delta t}}{2} \tag{12}$$

Using the Taylor expansion for $\log(1+x)$ again,

$$\begin{aligned}
p_{\rm rn}^{\ell}(1-p_{\rm rn})^{N-\ell} &= \tfrac{1}{2^N}\, e^{\ell\log(1+\alpha\sqrt{\Delta t})+(N-\ell)\log(1-\alpha\sqrt{\Delta t})} \\
&= \tfrac{1}{2^N}\, e^{\ell(\alpha\sqrt{\Delta t}-\frac{\alpha^2}{2}\Delta t)+(N-\ell)(-\alpha\sqrt{\Delta t}-\frac{\alpha^2}{2}\Delta t)+O(\sqrt{\Delta t})} \\
&= \tfrac{1}{2^N}\, e^{-(N-2\ell)\alpha\sqrt{\Delta t}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}T} e^{O(\sqrt{\Delta t})}
\end{aligned} \tag{13}$$

Thus, the theoretical fair value (4) in the Binomial model becomes, again ignoring the last exponential $e^{O(\sqrt{\Delta t})}$ in (13),

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT}\sum_{\ell=0}^{N} H\big(\,S_{N,\ell}\,\big)\,\tbinom{N}{\ell} p_{\rm rn}^{\ell}(1-p_{\rm rn})^{N-\ell} \\
&= e^{-rT}\sum_{\ell=0}^{N} H\big(\,S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}\,(2\ell-N)/\sqrt{N}} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tbinom{N}{\ell}\tfrac{1}{2^N}\, e^{-(N-2\ell)\alpha\sqrt{\Delta t}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}T} \\
&= e^{-rT}e^{-\frac{\alpha^2}{2}T}\sum_{\ell=0}^{N} \underbrace{H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}(2\ell-N)/\sqrt{N}} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\, e^{\alpha\sqrt{T}\,(2\ell-N)/\sqrt{N}}}_{=:f[(2\ell-N)/\sqrt{N}] \text{ fuer Aufgabe1, Ueblatt9}}\;\tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{\ell} \\
&\overset{\Delta t\to 0}{\to} e^{-rT}e^{-\frac{\alpha^2}{2}T}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\,x} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\, e^{\alpha\sqrt{T}\,x}\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\,x} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac12(x-\sqrt{T}\alpha)^2}\,dx
\end{aligned}$$

Making the substitution of variables

$$y \;=\; x-\sqrt{T}\alpha \;\;\Leftrightarrow\;\; x \;=\; y+\sqrt{T}\alpha$$

we arrive at

$$\begin{aligned}
V_0 &= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\,x} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac12(x-\sqrt{T}\alpha)^2}\,dx \\
&= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y+\sigma T\alpha} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac12 y^2}\,dy \\
&= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y+T(r-\mu)} e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac12 y^2}\,dy \\
&= e^{-rT}\int_{\mathbb{R}} H\big(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T}\big)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac12 y^2}\,dy
\end{aligned}$$

which coincides with (6). ■

In the next lecture we apply the basic pricing formula (6),

$$V_0^{\mathrm{BS}} \;=\; e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} H\big(\, S_0\, e^{\sigma\sqrt{T}x \,+\, (r-\frac{\sigma^2}{2})T} \,\big)\; e^{-\frac{x^2}{2}}\; \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

to standard call and put options and obtain in this way the famous Black-Scholes formulae, for which Robert Merton and Myron Scholes received the Economics Nobel Prize in 1997 (*"for a new method to determine the value of derivatives"*). Fischer Black died in 1995.