



Hochschule **RheinMain**
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

Die Grundidee der Optionspreisbewertung

Grundidee der Optionspreisbewertung



Hochschule RheinMain
University of Applied Sciences
Wiesbaden Rüsselsheim

- Was ist ein **Derivat** oder eine **Option** ?
- Eine **Option** hat zunächst einmal ein Underlying oder ein Basiswert.
Das muss ein liquid handelbares Asset sein, etwa eine Aktie, ein Rohstoff wie Öl, Gold oder Silber oder ein Währungswechselkurs.
- Dementsprechend hat man dann eine Aktien-Option, eine Rohstoff-Option oder eine Währungs-Option.
- Dann hat eine Option eine feste Laufzeit T , etwa 1 Monat, 1 Jahr, 5 Jahre oder auch noch länger.

Grundidee der Optionspreisbewertung



- Es bezeichne S_T den Wert des Underlyings zur Zeit T . Das ist also in der Zukunft und das S_T ist jetzt noch nicht bekannt.
- Dann, rein mathematisch gesprochen: Eine **Option** auf einen Basiswert S_t mit Fälligkeitsdatum T ist

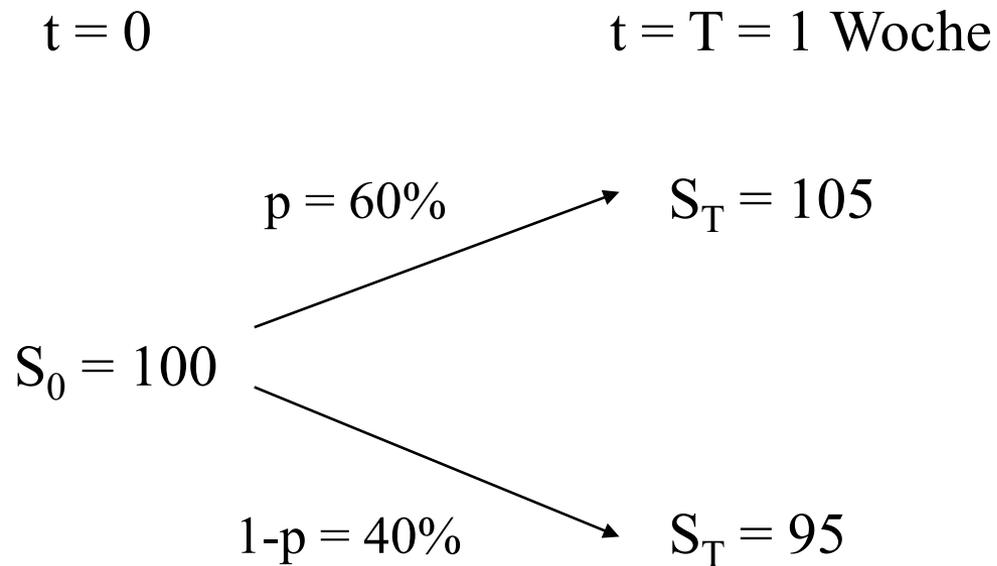
eine beliebige Auszahlungs-Funktion $f(S_T)$.

Der Käufer der Option f bekommt bei Fälligkeit $t = T$ den Betrag $f(S_T)$ vom Optionsverkäufer ausbezahlt.



Ein einfaches Beispiel:

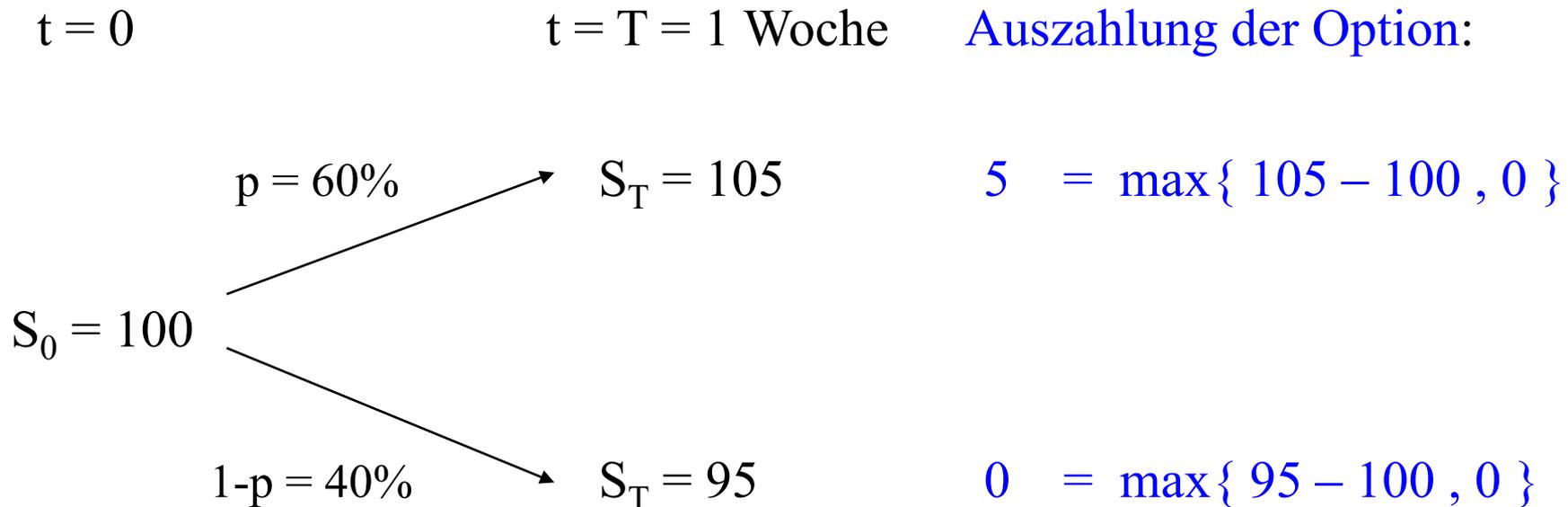
- Wir betrachten eine Aktie mit einem Zeithorizont von 1 Woche:





Ein einfaches Beispiel:

- Standard-Kauf-Option: $f(S_T) := \max\{S_T - S_0, 0\}$





Ein einfaches Beispiel:

- Man könnte meinen:

$$\text{Optionspreis} = 60\% * 5 \text{ Euro} + 40\% * 0 \text{ Euro} = 3 \text{ Euro} .$$

- Das ist falsch, wie wir gleich sehen werden. Nehmen wir an, das wäre richtig. Es könnte folgendes passieren:

Ein grosser Investor möchte 1 Million von diesen Optionen bei einer Bank kaufen. Die Bank bekäme also bei $t = 0$ den Betrag 3 Millionen Euro.

Die Zeit von 1 Woche vergeht und das Underlying ist entweder gestiegen oder gefallen.



Ein einfaches Beispiel:

- Ist das Underlying gefallen, müsste die Bank nichts an den Investor zahlen und hätte auf einen Schlag 3 Mio Gewinn gemacht.
- Ist das Underlying jedoch gestiegen, müsste die Bank 5 Mio an den Investor zahlen und hätte auf einen Schlag 2 Mio Verlust gemacht.
- Derartige Risiken wollen Banken nicht eingehen. Sondern, ähnlich wie ein Autohändler, möchte eine Bank ein paar Prozent Gewinn pro verkaufter Option machen, egal, ob das der Option zu Grunde liegende Underlying steigt, fällt oder neutral bleibt.
- Mit anderen Worten, eine Bank kann nicht statistisch argumentieren wie eine Versicherung, die etwa 1000 Lebensversicherungen verkauft, und wenn dann mal etwa jemand 95 wird und die Versicherung viel bezahlen muss, dann sind eben auch immer ein paar Leute dabei, die schon mit 55 oder mit 65 sterben.



Ein einfaches Beispiel:

- Sterbetafeln sind statistisch sehr stabil, die Preisentwicklungen von liquide handelbaren Assets wie Aktien, Rohstoffen oder Währungen lassen jedoch keine verlässlichen Vorhersagen zu. Also: Die Bank verkauft einmal in möglicherweise sehr hoher Stückzahl eine Option $f(S_T)$ und dann muss das klappen, für jedes f einzeln, nicht nur on average.
- Egal, ob das Underlying steigt, fällt, oder neutral bleibt, möchte die Bank ein paar Prozent Gewinn machen, wie funktioniert das?
- Hier kommt jetzt die Finanzmathematik ins Spiel:
Theorem: Jede Options-Auszahlung $f(S_T)$ kann durch eine geeignete Handelsstrategie in dem Underlying S_t repliziert werden.
- Konkret in diesem Beispiel geht das so:



Ein einfaches Beispiel:

- Als Optionspreis muss sie nur 2,50 Euro verlangen (also keine 3 Euro).
- Dann muss die Bank bei $t = 0$ eine halbe Aktie kaufen.
- Bei Fälligkeit der Option bei $t = T = 1$ Woche muss die Bank diese halbe Aktie dann wieder verkaufen:

$$\begin{aligned}\text{BankPortfolio_heute} &= 2,50 = 2,50 - 50 + 50 \\ &= -47,50(\text{cash}) + \text{halbe Aktie}\end{aligned}$$

$$105/2 = -47,50 + 52,50 = 5 \text{ Euro}$$

$$\text{BankPortfolio_1Woche} = -47,50(\text{cash}) +$$

$$95/2 = -47,50 + 47,50 = 0 \text{ Euro}$$

Also:

$$\text{BankPortfolio_1Woche} = \text{option_payoff}$$



Ein einfaches Beispiel:

- Also: Mit der Handelsstrategie “**Kaufe eine halbe Aktie**” ist die Bank in der Lage, den **option payoff exakt zu replizieren**.
- Der **faire Preis einer Option** ist dann das Geld, das man braucht, um eine replizierende Strategie aufsetzen zu können.
- In dem Beispiel wären das also nur **2,50 Euro** .
- Der tatsächliche Preis einer Option ist dann vielleicht 2,55 Euro oder 2,53 Euro oder 2,52 Euro...
- Gegenstand dieser Vorlesung: Zu gegebenem $f(S_T)$, wie bestimmt man die Handelsstrategie und wie bestimmt man das Startgeld, das ist dann der Optionspreis, was man dazu braucht.