Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2023/24

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1.Aufgabe: Zur Herleitung der Black-Scholes Formeln werden wir die folgende Formel benötigen,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} f\big(\tfrac{2k-N}{\sqrt{N}}\big) \times \tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \tfrac{dx}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

die in dieser Aufgabe bewiesen werden soll (oder eher plausibilisiert werden soll, da wir keine rigorosen Fehlerschranken angeben). Das können wir mit Hilfe der Stirlingschen Formel machen, die wir dann in Aufgabe 2 beweisen. Die Stirlingschen Formel lautet: Für grosse N gilt:

$$N! \;\approx\; \sqrt{2\pi N}\, \big(\tfrac{N}{e}\big)^N \tag{2}$$

oder genauer $\lim_{N\to\infty} \frac{N!}{\sqrt{2\pi N}} (\frac{e}{N})^N = 1$. Zum Beweis von (1) setzen wir

$$x \;:=\; \tfrac{2k-N}{\sqrt{N}} \;=\; x_{N,k} \;\in\; [-\sqrt{N}, +\sqrt{N}] \tag{3}$$

Wir halten dieses $x \in \mathbb{R}$ fest und lassen das N nach unendlich gehen, es geht dann offensichtlich auch das k,

$$k \;=\; \tfrac{N+\sqrt{N}\,x}{2} \tag{4}$$

nach unendlich. Zeigen Sie jetzt:

a) Es ist

$$N-k \;=\; \tfrac{N-\sqrt{N}\,x}{2} \tag{5}$$

und für grosse N gilt:

$$\tfrac{1}{2^N} \tbinom{N}{k} \;\approx\; \tfrac{1}{2^N} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\tfrac{N}{k(N-k)}}\; \tfrac{N^N}{k^k (N-k)^{N-k}} \tag{6}$$

Benutzen Sie dazu die Stirlingsche Formel (2).

b) Es ist

$$\frac{N}{k} = \frac{2}{1+\frac{x}{\sqrt{N}}}\,, \qquad \frac{N}{N-k} = \frac{2}{1-\frac{x}{\sqrt{N}}} \tag{7}$$

c) Weiterhin gilt

$$\frac{1}{2^N}\, \frac{N^N}{k^k (N-k)^{N-k}} \;=\; \frac{1}{(1-\frac{x^2}{N})^{N/2}} \times \frac{(1-\frac{x}{\sqrt{N}})^{\frac{\sqrt{N}\,x}{2}}}{(1+\frac{x}{\sqrt{N}})^{\frac{\sqrt{N}\,x}{2}}} \;\overset{N\to\infty}{\to}\; e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{8}$$

d) Es ist

$$\Delta x \;:=\; x_{N,k} - x_{N,k-1} \;=\; \tfrac{2}{\sqrt{N}} \tag{9}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{N}{k(N-k)}}}{\Delta x} \;=\; 1\;, \tag{10}$$

für grosse N gilt also

$$\sqrt{\tfrac{N}{k(N-k)}} \;\approx\; \Delta x\;. \tag{11}$$

Mit (6,8) und (11) haben wir dann also:

$$\tfrac{1}{2^N}\tbinom{N}{k} \;\approx\; e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \tag{12}$$

wobei $x = x_{N,k}$ durch die Formel (3) gegeben ist und das Δx durch die Formel (9).

2.Aufgabe: Wir beweisen (oder wieder eher plausibilisieren) jetzt noch die Stirlingsche Formel (2). Gehen Sie dazu folgendermassen vor:

a) Beweisen Sie durch Induktion und partieller Integration:

$$N! \;=\; \int_0^\infty x^N e^{-x} dx \tag{13}$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $x = y + N$ und Formel (13):

$$N! \;=\; \left(\tfrac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{N\log[1+\frac{y}{N}]\,-\,y}\, dy \tag{14}$$

c) Benutzen Sie dann die Taylor-Entwicklung $\log(1+h) \approx h - \frac{h^2}{2}$, um auf

$$N! \;\approx\; \left(\tfrac{N}{e}\right)^N \int_{-N}^\infty e^{-\frac{y^2}{2N}} dy \tag{15}$$

zu kommen.

d) Substituieren Sie schliesslich $y/\sqrt{N} = z$ in Formel (15) und folgern Sie

$$N! \;\approx\; \sqrt{2\pi N}\,\left(\tfrac{N}{e}\right)^N \tag{16}$$

für grosse N.