

4. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ eines Underlyings S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p_{\text{up}} \end{cases} \quad (1)$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0, t_1 = 1\text{week}, t_2 = 2\text{weeks}, t_3 = 3\text{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

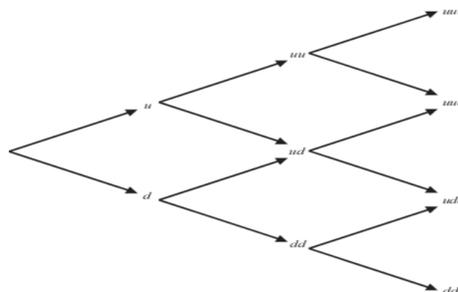
$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +10\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\text{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ , der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} := S_0(1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell(1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell} \quad (2)$$

- a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Preise durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die numerischen Werte für die jeweiligen Preise $S_{k,\ell}$ ein.

..bitte wenden

- b) Zeigen Sie, dass sich die Rekursionsformel für die Portfoliowerte V_k aus der Vorlesung sich in diesem Fall auf die Formel

$$V_k = \frac{V_{k+1}^{\text{up}} + V_{k+1}^{\text{down}}}{2}$$

reduziert.

- c) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option (englisch: call option) mit Fälligkeit (maturity) $t_N = t_3 = 3\text{weeks}$ und Auszahlungsfunktion (payoff)

$$H_{\text{call}}(S_3) = \max\{S_3 - 100, 0\} \quad (3)$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel aus Teil (b) verwenden.

- d) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den Payoff (3) replizieren kann.
- e) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{down}, \text{up}, \text{up}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{up}, \text{up}, \text{down}\}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (d) tatsächlich die Optionsauszahlung (3) replizieren tut.