Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik

1.Aufgabe: Gegeben sei eine Standard-Kauf-Option mit Laufzeit T = 4 Jahre und Ausübungspreis (oder englisch 'strike') $K = 120$,

$$H_{\text{call}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T - K\,,\, 0\,\}\;.$$

Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$ und der jährliche Zinssatz liege bei $r = 3\%$. Berechnen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung den Zeit-0 Preis $V_{\text{call},0}$ dieser Option. Die Volatilität betrage $\sigma = 25\%$. Die Werte der $N(x)$-Funktion stehen auf einem Taschenrechner typischerweise nicht zur Verfügung, benutzen Sie dazu die angehängte Tabelle.

2.Aufgabe: Beweisen Sie die Call-Put-Parität: Für die Optionspreise von Standard Call- und Put-Optionen im Black-Scholes Modell gilt die Formel:

$$V_{\text{call},0} \;-\; V_{\text{put},0} \;=\; S_0 \;-\; e^{-rT}\,K\;.$$

3.Aufgabe: Bei Optionen unterscheidet man grob zwischen 'performance-type' Optionen, bei denen der payoff eine Funktion der performance S_T/S_0 ist, und payoffs in 'absolute amount', bei denen der payoff, wie bei einem Standard-Call, etwa durch $H(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}$ gegeben ist. Wir betrachten eine 'at the money performance type' Call-Option mit Fälligkeitsdatum T ('at the money' meint strike = 1 = 100% und nicht etwa 80% oder 120%) und payoff

$$H_{\text{call,perf}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T/S_0 - 1\,,\, 0\,\}$$

Wir nehmen an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Es bezeichne V_0^{BS} den Black-Scholes Preis der Option bei $t = 0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung:

$$V_0^{\text{BS}} \;=\; N(\sigma\sqrt{T}/2) \;-\; N(-\sigma\sqrt{T}/2)$$

mit $N(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$.

b) Zeigen Sie, dass für kleinere Werte von $\sigma\sqrt{T}$, etwa $\sigma\sqrt{T} \lesssim 1$, der Preis aus (a) angenähert werden kann durch

$$V_0^{\text{BS}} \;\approx\; \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \;\approx\; 0.4 \times \sigma\sqrt{T}\;.$$