

10. Übungsblatt zur Vorlesung Einführung in die Finanzmathematik

1. Aufgabe: Wir betrachten eine Binär- oder Digital-Option mit Auszahlung

$$H(S_T) := \begin{cases} 1 & \text{falls } S_T \geq K \\ 0 & \text{falls } S_T < K \end{cases}$$

und nehmen an, dass die Preisdynamik des Underlyings $\{S_{t_k}\}$ durch ein das Black-Scholes Modell approximierendes Binomialmodell mit Returns

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &:= \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \\ \text{ret}_{\text{down}} &:= \mu \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \end{aligned}$$

gegeben ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Theorems 7.1 aus dem week10, mit Hilfe der Formel (6): Der Black-Scholes Preis V_0^{BS} von H ist gegeben durch

$$V_0^{\text{BS}} = e^{-rT} N(d_-)$$

Dabei ist (das d_+ werden wir erst nächste Woche in den Black-Scholes Formeln benutzen, kommt in dieser Aufgabe noch nicht vor)

$$d_{\pm} := \frac{\log \frac{S_0}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

und die Funktion N ist die kummulierte Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, gegeben durch

$$N(x) := \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} .$$