

**Probe-Klausur zur Vorlesung
Einführung in die Finanzmathematik**

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Punkte	10	20	10	10	10	60

1. Aufgabe (10 Punkte): Ein Investor verfolgt folgende Handelsstrategie: Ist S_k der Schlusskurs einer Aktie am Tag k , so hält er $S_k - S_0$ Aktien am Ende von Tag k . Folgender Preis-Pfad $\{S_0, S_1, \dots, S_7\}$ habe sich realisiert:

$$\{100, 98, 95, 97, 101, 101, 105, 108\}$$

Die Position wurde am Ende von Tag 7 zum Schlusskurs von 108 geschlossen. Welchen Betrag hat diese Strategie generiert? Die Zinsen seien $r = 0$.

2. Aufgabe (20 Punkte): Wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p_{\text{up}} \end{cases} \quad (1)$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$. Die Returns seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +20\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -20\% \end{aligned}$$

und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\text{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

- a) Skizzieren Sie den Binomialbaum (den rekombinierenden Binomialbaum mit $N + 1 = 4$ Endpunkten) für dieses Modell und tragen Sie dann an den Knotenpunkten die numerischen Werte für die jeweiligen Underlying-Preise $S_{k,\ell} = S_0(1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell(1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell}$ ein.
- b) Betrachten Sie eine Standard-Verkaufsoption mit Fälligkeit $N = 3$ und Auszahlungsfunktion

$$H_{\text{put}}(S_3) = \max\{110 - S_3, 0\} \quad (2)$$

Nehmen Sie an, dass die Zinsen null sind, $r = 0$. Berechnen Sie den Preis dieser Option (indem Sie die Rekursionsformel für das Binomialmodell verwenden).

- c) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktienpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man den Payoff (2) replizieren kann.
- d) Zeigen Sie jetzt explizit für die Preispfade

$$\begin{aligned} \text{pfad}_1 &= \{\text{down, down, up}\} \\ \text{pfad}_2 &= \{\text{up, down, down}\} \end{aligned}$$

dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (c) tatsächlich die Optionsauszahlung (2) replizieren tut.

3.Aufgabe (10 Punkte): Gegeben sei eine Standard-Verkaufsoption mit Laufzeit $T = 3$ Jahre und Ausübungspreis (oder Strike) $K = 110$,

$$H_{\text{put}}(S_T) = \max\{110 - S_T, 0\}.$$

Der aktuelle Preis des Underlyings sei $S_0 = 100$ und der jährliche Zinssatz sei null, $r = 0\%$. Berechnen Sie mit Hilfe der Black-Scholes Formeln aus der Vorlesung den Preis $V_{\text{put},0}^{\text{BS}}$ dieser Option. Die Volatilität betrage $\sigma = 20\%$. Die Werte der $N(x)$ -Funktion stehen auf einem Taschenrechner typischerweise nicht zur Verfügung, benutzen Sie dazu die angehängte Tabelle.

4.Aufgabe (10 Punkte): Betrachten Sie die pfadunabhängige Option H mit Laufzeit T und Auszahlung

$$H(S_T) := \frac{S_0}{S_T}$$

Die Preisdynamik des Underlyings sei gegeben durch ein Black-Scholes Modell mit Volatilität σ und Zinssatz r . Berechnen Sie den Black-Scholes Preis $V_0 = V_0^{\text{BS}}$ dieser Option.

5.Aufgabe (10 Punkte): Ein Geldbetrag von $G_0 = 100$ soll für $T = 10$ Jahre lang verzinst werden. Der jährliche Zinssatz betrage $r = 10\%$. Berechnen Sie das End-Kapital G_T nach 10 Jahren, wenn

- das jeweils aktuelle Kapital G_t diskret einmal pro Jahr mit 10% verzinst wird
- das jeweils aktuelle Kapital G_t diskret viermal pro Jahr mit jeweils 2.5% verzinst wird
- das jeweils aktuelle Kapital G_t stetig verzinst wird.