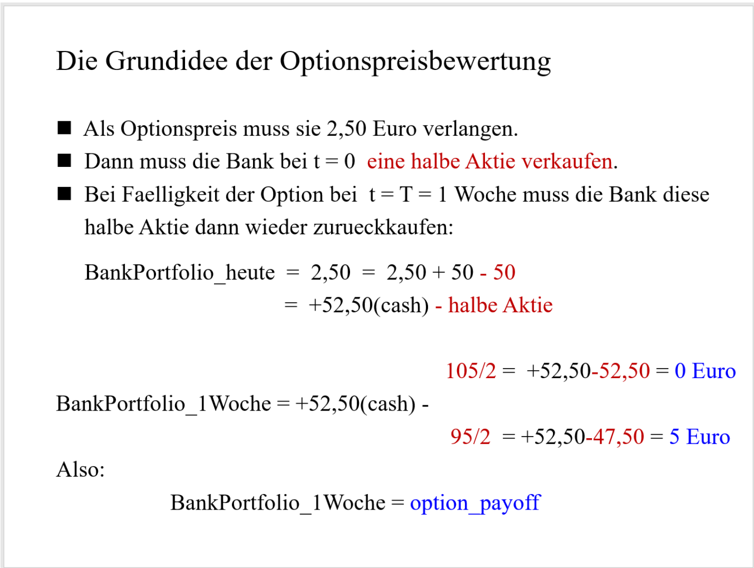
Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Einführung in die Finanzmathematik

Aufgabe 1) Man findet $V_0 = 2,50$ wie bei der Standard-Kauf-Option und $\delta = -0,5$, die Bank muss zur Replikation des Option-Payoffs bei Zeit 0 eine halbe Aktie verkaufen. Die entsprechende slide aus den week1.pdf sieht dann so aus:



Aufgabe 2) Wir haben ein Startgeld V_0. Zum Zeitpunkt $t = 0$ kaufen wir δ Stücke vom Underlying, dafür müssen wir (die Bank) $\delta\, S_0$ bezahlen. Das Bank-Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht also so aus:

$$V_0 \;=\; \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_0}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von $t = 0$ nach $t = T$. Die Cash-Position bleibt gleich (wir nehmen an, dass die Zinsen 0 sind, $r = 0$). Die Aktien-Position verändert ihren Wert von δS_0 zu δS_T mit $S_T \in \{S_{\text{up}}, S_{\text{down}}\}$. Also, der Wert des Bank-Portfolios zur Zeit $t = T$ beträgt

$$V_T \;=\; \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_T}_{\text{Aktie}} \;\stackrel{!}{=}\; H(S_T)$$

Dabei ist $H(S_T) \in \{H_{\text{up}}, H_{\text{down}}\}$ die Optionsauszahlung. Also erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{up}} &= H_{\text{up}} \\ V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{down}} &= H_{\text{down}} \end{aligned}$$

Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, bekommen wir

$$\delta(S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}) \;=\; H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}$$

oder

$$\delta \;=\; \frac{H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}$$

Das können wir etwa in die erste Gleichung einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned}
V_0 &= H_{\mathrm{up}} \;-\; \delta(S_{\mathrm{up}} - S_0) \\
&= H_{\mathrm{up}} \;-\; \frac{H_{\mathrm{up}} - H_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,(S_{\mathrm{up}} - S_0) \\
&= H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;-\; H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \\
&= H_{\mathrm{up}}\,\frac{S_0 - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,\frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}} \\
&= H_{\mathrm{up}}\,w_{\mathrm{up}} \;+\; H_{\mathrm{down}}\,w_{\mathrm{down}}
\end{aligned}$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned}
w_{\mathrm{up}} &= \frac{S_0 - S_{\mathrm{down}}}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,, \\
w_{\mathrm{down}} &= \frac{S_{\mathrm{up}} - S_0}{S_{\mathrm{up}} - S_{\mathrm{down}}}\,.
\end{aligned}$$