week9b: Kapitel 5: Stochastische Integrale und die Ito-Formel

Erinnern wir uns zunächst an das Theorem 4.3 und die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung aus dem week9a:

Theorem 4.3: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ sei eine beliebige Funktion. Für eine Diskretisierung $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$ des Intervalls $[0,T]$ definieren wir die Grösse

$$I_{\Delta t}(f) \quad := \quad \sum_{k=1}^{N} f(t_k)\,(x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \quad = \quad \Delta t \sum_{k=1}^{N_t} f(t_k)\,\phi_k^2 \tag{1}$$

Dann gilt

$$\lim_{\Delta t\to 0} I_{\Delta t}(f) \quad = \quad \int_0^T f(t)\,dt \quad . \tag{2}$$

Dabei ist der Limes im folgenden Sinne zu verstehen:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \mathsf{Prob}\Big[\ \big|I_{\Delta t}(f) \ - \ \int_0^T f(t)\,dt\big| \ \geq \ \varepsilon\ \Big] \quad = \quad 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 \ \ .$$

Aus diesem Theorem ergeben sich dann die

Rechenregeln für die Brownsche Bewegung: Schreibt man den Ausdruck in (1) im Limes $\Delta t \to 0$ als $\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2$, dann liest sich die Gleichung (2) folgendermaßen:

$$\int_0^T f(t)\,(dx_t)^2 \quad = \quad \int_0^T f(t)\,dt \tag{3}$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung (3) wird üblicherweise in der kompakten Notation

$$(dx_t)^2 \quad = \quad dt \tag{4}$$

zum Ausdruck gebracht, obwohl die Gleichung (4) nur für sich genommen, etwa wieder mit endlicher Diskretisierung $dt \to \Delta t > 0$, ja nicht richtig ist: Die Brownsche Bewegung ist gegeben durch (bei endlicher Diskretisierung)

$$x_{t_k} \quad = \quad \sqrt{\Delta t}\, \textstyle\sum_{j=1}^{k} \phi_j \tag{5}$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen ϕ_j, also ist

$$(dx_t)^2 \;\leftarrow\; (\Delta x_{t_k})^2 \;=\; (x_{t_k} - x_{t_{k-1}})^2 \;=\; \big(\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\big)^2 \;=\; \Delta t\,\phi_k^2 \quad\neq\quad \Delta t \;\to\; dt \tag{6}$$

Erst wenn die Gleichung (6) über k summiert wird und dann der Limes $\Delta t \to 0$ genommen wird (und vorher vielleicht noch mit einem beliebigen Faktor f_{t_k} multipliziert wird), also erst nach Anwenden der Operation

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{k=1}^{N} f_{t_k}\;\cdots \qquad\qquad \text{mit}\;\; N \;=\; \tfrac{T}{\Delta t} \;\to\; \infty \tag{7}$$

erhält man aus (6) eine korrekte Identität. Allerdings, wenn man eine formale Rechnung macht, in der dt's und dx_t's vorkommen, hat man das Anwenden der Operation (7) am Ende der Rechnung üblicherweise immer vor um dann zu konkreten Zahlen zu kommen, und deshalb werden wir also im weiteren Verlauf der Vorlesung bei solchen Rechnungen immer die **folgenden Rechenregeln**

$$\begin{aligned} (dx_t)^2 &= dt \\ dx_t\,dt &= 0 \\ (dt)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

verwenden.

Die Ito-Formel ist jetzt keine grosse Sache mehr, die wesentliche Arbeit haben wir schon gemacht. Es sei $f = f(x)$ eine beliebige Funktion. Für das x wollen wir die Brownsche Bewegung x_t in das f einsetzen. Wir betrachten die Differenz $f(x_T) - f(x_0)$ für einen gegebenen Zeithorizont $T > 0$ und schreiben

$$f(x_T) - f(x_0) \;\;=\;\; \sum_{k=1}^{N}\big\{\, f(x_{t_k}) \;-\; f(x_{t_{k-1}})\,\big\} \tag{9}$$

mit $t_k = k\Delta t$ und $N = T/\Delta t$ so dass $t_N = N\Delta t = T$ wie üblich. Da wir am Ende den Limes $\Delta t \to 0$ nehmen wollen, schreiben wir gleich dt anstatt Δt und dx_t anstatt Δx_t. Also etwa $t_k = k\,dt$ und $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}} = \sqrt{dt}\,\phi_k$. Wir haben dann also:

$$x_{t_k} \;\;=\;\; x_{t_{k-1}} \;+\; dx_{t_k} \tag{10}$$

Mit dem Satz von Taylor können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) \;&=\; f\big(x_{t_{k-1}} + dx_{t_k}\big) \\ &=\; f(x_{t_{k-1}}) \;+\; f'(x_{t_{k-1}})\,dx_{t_k} \;+\; \tfrac{1}{2}\,f''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^2 \;+\; \tfrac{1}{3!}\,f'''(x_{t_{k-1}})\,(dx_{t_k})^3 \;+\;\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

Jetzt benutzen wir die Rechenregeln für die Brownsche Bewegung:

$$(dx_{t_k})^2 \;\;=\;\; dt$$

und

$$(dx_{t_k})^3 \;=\; (dx_{t_k})^2\,dx_{t_k} \;=\; dt\,dx_{t_k} \;=\; 0$$

Also bekommen wir im Limes $\Delta t \to 0$:

$$\begin{aligned} f(x_{t_k}) &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\, dt + \tfrac{1}{3!} f'''(x_{t_{k-1}}) \times 0 \\ &= f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\, dt \end{aligned} \tag{12}$$

oder die folgende Formel, die auch als **Ito-Formel in differentieller Version** bezeichnet wird:

$$df(x_{t_k}) := f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) = f'(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\, dt \tag{13}$$

Wenn wir (13) in (9) einsetzen, bekommen wir

$$\begin{aligned} f(x_T) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{N} \{\, f(x_{t_k}) - f(x_{t_{k-1}}) \,\} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \{\, f'(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\, dt \,\} \\ &\overset{\Delta t \to 0}{=} \int_0^T f'(x_t)\, dx_t + \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt \end{aligned} \tag{14}$$

Das erste Integral in (14), wir ersetzen zum Zwecke der Definition den Integranden f' durch ein f,

$$\int_0^T f(x_t)\, dx_t := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} \tag{15}$$

wird auch als ein stochastisches Ito-Integral bezeichnet. Neben solchen stochastischen Ito-Integralen gibt es auch stochastische Stratonovich-Integrale, diese sind folgendermassen definiert

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\big)\, dx_{t_k} \tag{16}$$

Man tut also das f nicht am 'linken Randpunkt' $x_{t_{k-1}}$ evaluieren, sondern am 'Intervallmittelpunkt' $\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}$. Bei den üblichen deterministischen Riemann-Integralen wie man sie aus der Analysis kennt, spielt das natürlich keine Rolle und im Limes Rechteckbreite gegen Null kommt da immer dasselbe raus. Das liegt daran, dass $(dt)^2 = 0$ ist oder wenn die deterministische Integrationsvariable ein x ist, $(dx)^2 = 0$. Für eine Brownsche Bewegung ist nun aber $(dx_t)^2 \neq 0$ und das hat die folgende, auf den ersten Blick doch etwas gewöhnungsbedürftige Konsequenz:

Theorem 5.1: Für stochastische Ito- und Stratonovich-Integrale besteht der folgende Zusammenhang:

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t = \int_0^T f(x_t)\, dx_t + \tfrac{1}{2} \int_0^T f'(x_t)\, dt \tag{17}$$

für eine beliebige Funktion $f = f(x)$.

Proof: Mit $dx_{t_k} = x_{t_k} - x_{t_{k-1}}$ haben wir

$$\tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2} \;=\; x_{t_{k-1}} + \tfrac{x_{t_k}-x_{t_{k-1}}}{2} \;=\; x_{t_{k-1}} + \tfrac{dx_{t_k}}{2}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\big)\, dx_{t_k} &= f\big(x_{t_{k-1}} + \tfrac{dx_{t_k}}{2}\big)\, dx_{t_k} \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} \Big\{ f(x_{t_{k-1}}) + f'(x_{t_{k-1}})\tfrac{dx_{t_k}}{2} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\big(\tfrac{dx_{t_k}}{2}\big)^2 \Big\}\, dx_{t_k} \\
&\overset{(18)}{=} f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}})\tfrac{(dx_{t_k})^2}{2} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}})\tfrac{dt\, dx_{t_k}}{4} \\
&\overset{(18)}{=} f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}})\tfrac{dt}{2} + \tfrac{1}{2} f''(x_{t_{k-1}}) \times 0
\end{aligned}$$

wobei wir wieder die Rechenregeln

$$\begin{aligned}
(dx_t)^2 &= dt \\
dx_t\, dt &= 0 \\
(dt)^2 &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

benutzt haben. Also,

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_0^T f(x_t) \circ dx_t &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} f\big(\tfrac{x_{t_{k-1}}+x_{t_k}}{2}\big)\, dx_{t_k} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{N} \Big\{ f(x_{t_{k-1}})\, dx_{t_k} + f'(x_{t_{k-1}})\tfrac{dt}{2} \Big\} \\
&= \textstyle\int_0^T f(x_t)\, dx_t + \tfrac{1}{2} \int_0^T f'(x_t)\, dt
\end{aligned}$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Aus (14) und (17) ergibt sich dann sofort das

Theorem 5.2: Es sei $f = f(x)$ eine beliebige, zweimal differenzierbare Funktion und $\{x_t\}_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt:

$$f(x_T) - f(x_0) = \textstyle\int_0^T f'(x_t)\, dx_t + \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt \tag{19}$$

$$= \textstyle\int_0^T f'(x_t) \circ dx_t \tag{20}$$

Dabei ist das erste Integral in (19) ein stochastisches Ito-Integral und das Integral in (20) ist ein stochastisches Stratonovich-Integral. Die Formel (19) wird auch als Ito-Formel oder als das **Ito-Lemma bezeichnet, in integraler Version**.

In der letzten Woche vor Weihnachten, in der online-Woche, wollen wir diese Sachen dann noch durch ein paar Excel/VBA-Simulationen veranschaulichen. Also folgende Sachen würden sich da anbieten:

Excel/VBA-Demos:

a) Plausibilisieren Sie die Aussage des Theorems 4.3 aus dem week9a.pdf durch eine geignete Excel/VBA-Simulation.

b) Plausibilisieren Sie die Aussage des Theorems 5.1 aus diesem week9b.pdf durch eine geignete Excel/VBA-Simulation.

c) Überprüfen Sie die Ito-Formel in integraler Version, das ist die Gleichung (19) im Theorem 5.2, durch eine geignete Excel/VBA-Simulation.