

### week4: Risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten für das Binomialmodell, Teil2

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir jetzt noch das folgende Theorem 3.2 weiter unten beweisen, welches die allgemeine Pricing-Formel vom letzten Mal, der Optionspreis ist der risikoneutrale Erwartungswert vom Payoff, für den Fall pfadunabhängiger Optionen etwas konkretisieren tut. Anstatt eines Beweises mit Induktion wollen wir eine direkte Rechnung machen um zu sehen, wie man auf die Formel kommt.

Wir betrachten also eine pfadunabhängige Option mit Auszahlungsfunktion

$$H = H(S_N)$$

Der Preisprozess des Underlyings sei gegeben, wie in diesem gesamten Kapitel, durch ein  $N$ -Perioden Binomialmodell,

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{with some probability } p \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{with probability } 1 - p \end{cases}$$

Wenn wir nach  $k$  Perioden bei Zeit  $k$  oder  $t_k$  sind, haben sich  $k$  Returns

$$\text{ret}_1, \dots, \text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$$

realisiert und den aktuellen Underlyingpreis  $S_k$  können wir schreiben als

$$\begin{aligned} S_k &= S_{k-1} (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_{k-2} (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &\quad \vdots \\ &= S_1 (1 + \text{ret}_2) \cdots (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_1) (1 + \text{ret}_2) \cdots (1 + \text{ret}_{k-1}) (1 + \text{ret}_k) \\ &= S_0 \prod_{j=1}^k (1 + \text{ret}_j) \end{aligned}$$

Die  $\text{ret}_j$  sind entweder up-returns oder down-returns. Nehmen wir an, dass wir  $\ell$  up-returns haben, dann müssen also die restlichen  $k - \ell$  Returns down-returns sein. Wenn die Anzahl der

up-returns festgelegt ist, spielt es keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt diese Returns auftreten, der Underlyingpreis ist dann immer gegeben durch

$$S_k = S_0 \prod_{j=1}^k (1 + \text{ret}_j) \stackrel{\ell \text{ up-returns}}{=} S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell} \\ =: S_{k,\ell}$$

In dem Theorem 3.1 konnten wir nun eine Wahrscheinlichkeit

$$p = p_{\text{rn}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

angeben, die es ermöglicht, den Preis  $V_0$  der Option  $H = H(S_N)$  in folgender Weise zu schreiben (mit  $R := 1 + r$ ):

$$V_0 = R^{-N} \mathbf{E}_{\text{rn}}[H(S_N)]$$

Den Erwartungswert in dieser Formel können wir jetzt folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rn}}[H(S_N)] &= \mathbf{E}_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \mathbf{E}_{\text{rn}}\left[\underbrace{\sum_{\ell=0}^N \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})}_{=1} H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N \mathbf{E}_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right) \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N \mathbf{E}_{\text{rn}}\left[H(S_{N,\ell}) \chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \mathbf{E}_{\text{rn}}\left[\chi(\text{es gibt } \ell \text{ up-returns})\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] \end{aligned}$$

Es gibt einen up-return mit Wahrscheinlichkeit  $p_{\text{rn}}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass etwa die ersten  $\ell$  Returns up-returns sind und die nächsten  $N - \ell$  Returns down-returns sind, ist dann gegeben durch

$$p_{\text{rn}}^\ell \times (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$$

Jetzt müssen aber nicht die ersten  $\ell$  Returns die up-returns sein, sondern es können irgendwelche der  $N$  Returns die  $\ell$  up-returns sein. Jede solche Auswahl von  $\ell$  up-returns aus den  $N$  Returns liefert einen Beitrag  $p_{\text{rn}}^\ell \times (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell}$  zur Wahrscheinlichkeit. Jetzt muss man sich nur noch überlegen, auf wieviele Art und Weisen man aus  $N$  Returns, oder aus  $N$  Plätzen  $1, 2, \dots, N$   $\ell$  Plätze auswählen kann, dafür gibt es nun gerade (das ist wie Ziehung der Lottozahlen, da gibt es 49 über 6 Möglichkeiten)

$$\binom{N}{\ell} = \frac{N!}{\ell!(N-\ell)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-\ell+1)}{1\cdot 2\cdots\ell}$$

Möglichkeiten. Also bekommen wir

$$\text{Prob}[\text{es gibt } \ell \text{ up-returns}] = \binom{N}{\ell} \times p_{\text{rn}}^\ell \times (1-p_{\text{rn}})^{N-\ell}$$

und für den Erwartungswert  $E_{\text{rn}}[H(S_N)]$  ergibt sich

$$\begin{aligned} E_{\text{rn}}[H(S_N)] &= E_{\text{rn}}\left[H\left(S_0 \prod_{j=1}^N (1 + \text{ret}_j)\right)\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \text{Prob}\left[\ell \text{ out of } N \text{ returns are up returns}\right] \\ &= \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} \times p_{\text{rn}}^\ell (1-p_{\text{rn}})^{N-\ell} \end{aligned}$$

Damit haben wir also das folgende Theorem 3.2 bewiesen:

**Theorem 3.2:** Consider a price process  $S_k = S(t_k)$  given by a Binomial model with returns  $\text{ret}_k \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$  and let  $r$  denote the interest rate paid per period. Let  $p_{\text{rn}}$  be the risk neutral probability given by

$$p_{\text{rn}} = \frac{r - \text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

Let

$$H = H(S_N)$$

be the payoff of some path independent option which depends on the underlying at maturity only. Then the time zero theoretical fair value  $V_0$  of this option can be written as

$$V_0 = R^{-N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^\ell (1-p_{\text{rn}})^{N-\ell} \quad (1)$$

with

$$S_{N,\ell} = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell} .$$

Machen wir noch ein kleines Beispiel als consistency-check:

**Beispiel:** Nehmen wir an, dass die Zinsen null sind,  $r = 0$ . Betrachten wir den pfadunabhängigen Payoff

$$H(S_N) = S_N$$

Man bekommt also einfach den Wert des Underlyings bei Fälligkeit oder Maturity  $t_N$  oder nach  $N$  Perioden ausbezahlt. Diese Auszahlung kann man garantieren, wenn man zum Zeitpunkt  $t_0$  bei Start der Option einfach das Underlying kauft, das kostet dann  $S_0$ . Man hat also  $\delta_0 = 1$ , man kauft 1 Stück vom Underlying, und hält das ganz einfach bis Fälligkeit. In diesem Fall muss man also das Hedge-Portfolio nicht nach jeder Periode anpassen, sondern man hat für alle delta's

$$\delta_0 = \delta_1 = \dots \delta_{N-1} = 1 ,$$

da ändert sich nichts. Man sagt auch, man hat einen statischen Hedge. Der Preis der Option  $H$ , das ist also das Geld, was man braucht, um diese Handelsstrategie machen zu können, ist dann offensichtlich

$$V_0 = S_0 ,$$

soviel Geld braucht man ja am Anfang, um das Underlying kaufen zu können. Checken wir eben, dass wir dasselbe Resultat erhalten, wenn wir die Formel aus dem Theorem 3.2 anwenden: wir bekommen mit  $r = 0$  und  $H(S_N) = S_N$

$$\begin{aligned} V_0 &= R^{-N} \times \sum_{\ell=0}^N H(S_{N,\ell}) \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^{\ell} (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell} \\ &= 1 \times \sum_{\ell=0}^N S_{N,\ell} \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^{\ell} (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^N S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{\ell} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{N-\ell} \times \binom{N}{\ell} p_{\text{rn}}^{\ell} (1 - p_{\text{rn}})^{N-\ell} \\ &= S_0 \sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} [p_{\text{rn}}(1 + \text{ret}_{\text{up}})]^{\ell} [(1 - p_{\text{rn}})(1 + \text{ret}_{\text{down}})]^{N-\ell} \\ &= S_0 \left\{ [p_{\text{rn}}(1 + \text{ret}_{\text{up}})] + [(1 - p_{\text{rn}})(1 + \text{ret}_{\text{down}})] \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ p_{\text{rn}} + 1 - p_{\text{rn}} + p_{\text{rn}} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{\text{rn}}) \text{ret}_{\text{down}} \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ 1 + p_{\text{rn}} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{\text{rn}}) \text{ret}_{\text{down}} \right\}^N \\ &= S_0 \left\{ 1 + 0 \right\}^N = S_0 \end{aligned}$$

denn

$$p_{\text{rn}} \text{ret}_{\text{up}} + (1 - p_{\text{rn}}) \text{ret}_{\text{down}} = \frac{-\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \text{ret}_{\text{up}} + \frac{\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}} \text{ret}_{\text{down}} = 0 .$$

Damit haben wir die Formel für diesen einfachen Fall gecheckt.