

week2: Beispiele zum Binomialmodell

Wir wollen in dem folgenden Beispiel 1 den Preis einer Standard-Kauf-Option oder auch Call-Option in einem 3-Perioden Binomialmodell berechnen. Weiterhin wollen wir die replizierende Strategie berechnen, das heisst, wir wollen alle δ_k 's angeben, die man braucht, um mit Hilfe der Handelsstrategie "Halte δ_k Aktien am Ende vom Tag t_k " die Optionsauszahlung generieren zu können. Dass das dann auch tatsächlich der Fall ist, wollen wir dann am Ende nochmal explizit überprüfen.

Die Option in Beispiel 1 ist eine pfadunabhängige Option, die Auszahlung H hängt nur vom Underlyingpreis S_N bei Maturity ab, $H = H(S_N)$. In Beispiel 2 betrachten wir dann eine pfadabhängige oder auch 'exotische' Option. Bei solchen Optionen tut die Auszahlung H nicht nur von dem Underlyingpreis bei Maturity S_N abhängen, sondern sie hängt von dem gesamten realisierten Preispfad ab, $H = H(S_0, S_1, \dots, S_N)$. In einem solchen Fall ist es nicht mehr ausreichend, einen rekombinierenden Binomialbaum mit $N + 1$ Endpunkten zu betrachten, sondern wir müssen eine Baumstruktur mit 2^N Endpunkten betrachten.

Beispiel 1: Wir betrachten einen Zeithorizont von 3 Wochen und wir nehmen an, dass sich der Preis $S_k = S(t_k)$ eines Underlyings S sich nur wöchentlich ändern kann und dabei nur 2 Einstellungsmöglichkeiten hat. Das heisst genauer, wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess¹

$$S_k = S_{k-1} \times \begin{cases} (1 + \text{ret}_{\text{up}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{up}} \\ (1 + \text{ret}_{\text{down}}) & \text{mit W'keit } p_{\text{down}} = 1 - p_{\text{up}} \end{cases}$$

mit $k = 0, 1, 2, 3$ (und etwa $t_0 = 0$, $t_1 = 1\text{week}$, $t_2 = 2\text{weeks}$, $t_3 = 3\text{weeks}$). Die wöchentlichen Returns seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{ret}_{\text{up}} &= +10\% \\ \text{ret}_{\text{down}} &= -10\% \end{aligned}$$

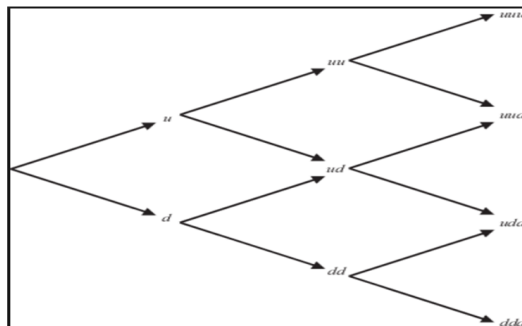
und die (etwa durch eine Zeitreihenanalyse ermittelte) Wahrscheinlichkeit für einen up-move sei 60%, $p_{\text{up}} = 60\%$. Weiter sei $S_0 = 100$.

Sämtliche möglichen Preise in diesem Modell lassen sich durch zwei Parameter charakterisieren: Einem Zeit-Parameter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, der uns sagt, in welcher Zeit-Periode wir gerade sind. Und einem weiteren Parameter ℓ , der uns sagt, wie viele up-moves es bis zum aktuellen Zeitpunkt gegeben hat. Also $\ell \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Preis $S_{k,\ell}$ zum Zeitpunkt k bei ℓ up-moves ist dann also gegeben durch

$$S_{k,\ell} := S_0(1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell(1 + \text{ret}_{\text{down}})^{k-\ell}$$

¹die W'keiten p_{up} und p_{down} sind nur angegeben, um Sie zu irritieren, man braucht sie nicht, um den Optionspreis zu berechnen. Die replizierende Strategie funktioniert für beliebige Werte von p_{up} und p_{down} .

- a) Machen Sie sich klar, dass alle möglichen Underlyingpreise $S_{k,\ell}$ durch die folgende Binomialbaum-Struktur verdeutlicht werden können,



und geben Sie die konkreten Werte von $S_{k,\ell}$ an jedem Knotenpunkt (k, ℓ) des Binomialbaums an.

- b) Nehmen Sie an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Rekursionsformel für die Portfoliowerte V_k aus dem Theorem 2.1 aus der Vorlesung sich in diesem Fall auf die Formel

$$V_k = \frac{V_{k+1}^{\text{up}} + V_{k+1}^{\text{down}}}{2}$$

reduziert.

- c) Betrachten Sie eine Standard-Kauf-Option (oder Call-Option) mit Fälligkeit $t_N = t_3 = 3\text{weeks}$ und Auszahlungsfunktion

$$H_{\text{call}}(S_3) = \max\{S_3 - S_0, 0\}$$

Berechnen Sie den Preis dieser Option, indem Sie die Rekursionsformel aus Teil (b) verwenden.

- d) Berechnen Sie jetzt für jeden Knotenpunkt im Binomial-Baum das $\delta_{k,\ell}$, die Anzahl von Aktien, die man zum Zeitpunkt t_k halten muss, wenn der Aktien- oder Underlyingpreis $S_{k,\ell}$ ist, damit man die Auszahlung H_{call} aus (c) replizieren kann.
- e) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{down, up, up}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{up, up, down}\}$$

Zeigen Sie jetzt explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (d) tatsächlich die Optionsauszahlung aus (c) replizieren tut.

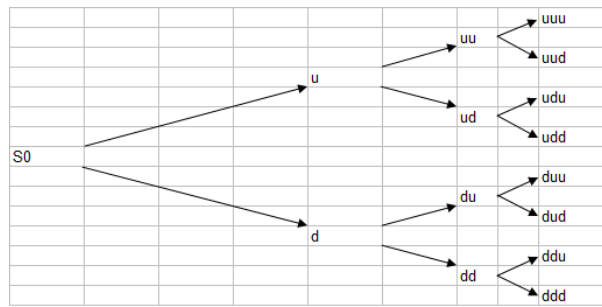
Beispiel 2: Wir betrachten wieder ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch $\text{ret}_k \in \{+10\%, -10\%\}$ für $k = 1, 2, 3$ und nehmen an, dass die Zinsen Null sind, $r = 0$. Es sei $S_0 = 100$. Wir betrachten eine All Time High Option mit Auszahlung

$$H(\{S_k\}) = \max_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k .$$

- a) Berechnen Sie den Preis V_0 dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 Endpunkten zu betrachten (wie in Beispiel 1), sondern Sie müssen folgende Baum-Struktur betrachten,



n -Perioden Binär-Baum mit 2^n Endpunkten, $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die V_k an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus Theorem 2.1.

- b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die δ 's, die Anzahl von Aktien, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung H replizieren kann.
- c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{up}, \text{up}, \text{up}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{up}, \text{down}, \text{down}\}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die δ 's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung H replizieren tut.