week12b: Payoff-Replikation im Black-Scholes Modell: Eine Excel/VBA-Simulation

Wir wollen jetzt die Aussage von Theorem 5.3.4 aus dem week11b durch eine geeignete Excel/VBA-Simulation verifizieren. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass die Zinsen $r = 0$ sind, dann müssen wir also nicht zwischen diskontierten und undiskontierten Grössen unterscheiden, wir haben $s_t = e^{-rt} S_t \overset{r=0}{=} S_t$. Weiterhin wollen wir eine Standard Call-Option mit Payoff

$$H_{\text{call}}(S_T) \;=\; \max\{\, S_T - K \,,\, 0 \,\}$$

betrachten, für die wir sowohl den Preis als auch das Delta durch eine analytische Formel ausdrücken können, das hatten wir in dem week12a gemacht:

$$V_{\text{call},t} \;=\; S_t \, N(d_+) \;-\; K \, e^{-r(T-t)} \, N(d_-)$$

mit

$$d_\pm \;:=\; \frac{\log \frac{S_t}{K} + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} \;=\; d_\pm(S_t, t)$$

und die Formel für das Delta δ_t zur Zeit t ist

$$\delta_{\text{call},t} \;=\; N\big(\, d_+(S_t, t) \,\big)$$

mit der Funktion

$$N(d) \;=\; \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

die in Excel zur Verfügung steht.

Ok, machen wir jetzt die Implementation: Wir brauchen die Standard-Formel für Handelsstrategien aus dem ersten Kapitel, das war das Theorem 1.1 in dem week1b, und wir nehmen die Zinsen $r = 0$ Version. Wir müssen also die Grösse

$$V(t_N) \;=\; V_0 \;+\; \sum_{k=1}^{N} \delta(t_{k-1}) \times \big(\, S_{t_k} \;-\; S_{t_{k-1}} \,\big)$$

berechnen mit

$$\delta(t_j) \;=\; N\big[\, d_+(S_{t_j}, t_j) \,\big]$$

und

$$d_+(S_{t_j}, t_j) \;=\; \frac{\log\frac{S_{t_j}}{K} + (0 + \frac{\sigma^2}{2})(t_N - t_j)}{\sigma\sqrt{t_N - t_j}}$$

und dann sollte in etwa gelten (exakt im Limes $\Delta t \to 0$)

$$V(t_N) \;\approx\; H(S_{t_N}) \;=\; \max\{\, S_{t_N} - K\,,\, 0\,\}$$

für beliebige Black-Scholes Pfade gegeben durch

$$S_{t_k} \;=\; S_{t_{k-1}}\bigl(\,1 \,+\, \mu\Delta t \,+\, \sigma\sqrt{\Delta t}\,\phi_k\,\bigr)$$

Man beachte, dass diese Pfade einen beliebigen real world Drift μ haben können, da muss nicht der Zinssatz r stehen, den wir hier ja auf 0 setzen wollen. Das μ ist also ein weiterer Input-Parameter für die Excel-Simulation.