Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann WS 2023/24

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei x_t eine Brownsche Bewegung. Beweisen Sie folgende Identitäten unter a) und b) mit Hilfe der Ito-Formel

$$f(x_T) - f(x_0) \;=\; \int_0^T f'(x_t)\,dx_t \;+\; \tfrac{1}{2}\int_0^T f''(x_t)\,dt \;,$$

das war die Formel (19) in dem week9b.pdf. Wählen Sie dazu jeweils ein geeignetes f:

a) $\int_0^t x_s\,dx_s \;=\; \frac{x_t^2 - t}{2}$

b) $\int_0^t x_s^2\,dx_s \;=\; \frac{x_t^3}{3} - \int_0^t x_s\,ds$.

2.Aufgabe: Die Hermite-Polynome h_n sind definiert durch (in Mathematiker-Konvention, nicht Physiker-Konvention, wo man ein $e^{\pm x^2}$ nimmt)

$$h_n(x) \;:=\; (-1)^n\, e^{+\frac{x^2}{2}} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \;,$$

wir benötigen sie in der 3.Aufgabe, der Weihnachts-Aufgabe.

a) Berechnen Sie explizit h_0, h_1, h_2, h_3 und h_4.

b) Zeigen Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x)\,\frac{t^n}{n!} \;=\; e^{\,xt - \frac{t^2}{2}} \tag{1}$$

Erinnern Sie sich dazu an die Taylor-Formel

$$f(x+\varepsilon) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n\,\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

und wählen Sie ein geeignetes f.

..bitte wenden

3.Aufgabe (Weihnachtsaufgabe[1]): Es sei

$$x_t \;=\; x_{t_k} \;=\; x_{kdt} \;=\; \sqrt{dt}\,\sum_{j=1}^{k}\phi_j$$

eine Brownsche Bewegung und

$$dx_{t_k} \;:=\; x_{t_k} - x_{t_{k-1}} \;=\; \sqrt{dt}\,\phi_k$$

Beweisen Sie die folgende Formel, dabei sind die h_n auf der rechten Seite von (2) die Hermite-Polynome aus Aufgabe 2:

$$I_n(t) \;:=\; \int_0^{s_n:=t} dx_{s_{n-1}} \int_0^{s_{n-1}} dx_{s_{n-2}} \cdots \int_0^{s_2} dx_{s_1} \int_0^{s_1} dx_{s_0} \;=\; \sqrt{t}^{\;n}\; h_n\!\left(\tfrac{x_t}{\sqrt{t}}\right) / \; n! \tag{2}$$

Dabei ist das mehrfache Integral in (2) ein Ito-Integral, also definiert durch die Diskretisierung

$$I_n(t_k = kdt) \;:=\; \sum_{j_{n-1}=1}^{j_n:=k}\sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-1}} \sum_{j_{n-2}=1}^{j_{n-1}-1}\sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-2}} \;\cdots\; \sum_{j_1=1}^{j_2-1}\sqrt{dt}\,\phi_{j_1} \sum_{j_0=1}^{j_1-1}\sqrt{dt}\,\phi_{j_0} \tag{3}$$

Es gilt also $j_0 < j_1 < \cdots < j_{n-2} < j_{n-1}$ so dass etwa ein konkretes $\phi_{j=6}$ höchstens einmal in dem Produkt auf der rechten Seite von (3) vorkommt, aber nicht mehrfach. Die Formel (2) gilt dann im Limes $dt \to 0$, $k \to \infty$ mit $t = t_k = k\,dt$ fest. Gehen Sie zum Beweis dann folgendermassen vor:

a) Definieren Sie die Funktion (mit $t = t_k = kdt$)

$$F_t \;=\; F_{t_k} \;=\; F\big(t_k\,,\,\{\phi_j\}_{j=1}^k\,,\,\lambda\big) \;:=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\, I_n(t_k) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{k}\lambda^n\, I_n(t_k)$$

und ein $dF_t = dF_{t_k}$ durch

$$dF_{t_k} \;:=\; F_{t_k} - F_{t_{k-1}}$$

Zeigen Sie dann, dass das F_t die folgende stochastische DGL im Ito-Sinn erfüllt:

$$dF_t \;=\; \lambda\, F_t\, dx_t \tag{4}$$

Dabei meint 'im Ito-Sinn', dass (4) der $dt \to 0$ Limes von der folgenden diskreten stochastischen Rekursion ist:

$$dF_{t_k} \;=\; \lambda\, F_{t_{k-1}}\, dx_{t_k} \tag{5}$$

Auf der rechten Seite von (5) steht also ein $F_{t_{k-1}}$, kein F_{t_k}, bei stochastischen DGLen macht das einen Unterschied.

..weiter auf dem nächsten Blatt

[1] ..meint: ist definitiv nicht klausurrelevant..

b) In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die stochastische DGL für das Black-Scholes Model

$$\frac{dS_t}{S_t} \;=\; \mu\, dt \,+\, \sigma\, dx_t$$

durch

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\sigma\, x_t \,+\, (\mu - \sigma^2/2)t}$$

gelöst wird. Wie lautet also die Lösung von (4)?

c) Beweisen Sie schliesslich (2), indem Sie die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome (1) aus Aufgabe 2 auf die explizite Lösung von (4) anwenden und dann einen Koeffizientenvergleich machen.

d) Schliesslich wollen wir die Formel (2) noch durch eine Excel/VBA- oder R-Simulation verifizieren, etwa für $n = 2, 3, 4$. Dazu wollen wir das $I_n(t)$ und die rechte Seite von (2) für $t \in [0, T]$ in einem Diagramm plotten. Die $I_n(t)$ gegeben durch (3) können wir durch die folgende Rekursion berechnen: Wir definieren ein $\tilde{I}_n(t)$ gemäss (die letzte Summe geht nur bis $k-1$, nicht bis k)

$$\tilde{I}_n(t_k) \;:=\; \sum_{j_{n-1}=1}^{j_n := k-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-1}} \sum_{j_{n-2}=1}^{j_{n-1}-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-2}} \;\cdots\; \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_1} \sum_{j_0=1}^{j_1-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_0}$$

Dann gilt offensichtlich für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n(t_k) \;&=\; \sum_{j_{n-1}=1}^{j_n := k-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-1}}\; \tilde{I}_{n-1}(t_{j_{n-1}}) \\ &\overset{j_{n-1} =: j}{=} \; \sum_{j=1}^{k-1} \sqrt{dt}\,\phi_j\; \tilde{I}_{n-1}(t_j) \end{aligned} \tag{6}$$

mit

$$\tilde{I}_{n=0}(t_j) \;:=\; 1 \quad \forall t_j$$

Aus den $\tilde{I}_n$ können wir dann noch die exakten I_n berechnen gemäss

$$I_n(t_k) \;=\; \tilde{I}_n(t_k) \,+\, \sqrt{dt}\,\phi_k\; \tilde{I}_{n-1}(t_k)$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite gegen 0 konvergiert für $dt \to 0$.