

## 8. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1. Aufgabe:** Es sei  $\{x_t\}_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung. Wir wollen in dieser Aufgabe Erwartungswerte von stochastischen Integralen berechnen. Dazu diskretisieren wir das Intervall

$$[0, T] \approx \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N\}$$

mit

$$t_k = k \Delta t$$

und

$$t_N = N \Delta t = T$$

so dass also  $N = T/\Delta t$  oder  $\Delta t = T/N$ . Wir betrachten das Ito-Integral

$$I_1 := \int_0^T x_t dx_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N x_{t_{k-1}} (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) =: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_1(\Delta t)$$

und das sogenannte Stratonovich-Integral

$$I_2 := \int_0^T x_t \circ dx_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2} (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) =: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_2(\Delta t)$$

Erinnern Sie sich daran, dass in diskretisierter Zeit eine Brownsche Bewegung gegeben ist durch

$$x_{t_k} = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j$$

mit standard-normalverteilten Zufallszahlen  $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, N}$ , und dass Erwartungswerte entweder mit dem Theorem 4.1 aus dem Skript oder aber auch wie folgt berechnet werden können:

$$\mathbb{E}[\cdot] = \int_{\mathbb{R}^N} \cdot \prod_{k=1}^N e^{-\frac{\phi_k^2}{2}} \frac{d\phi_k}{\sqrt{2\pi}}$$

Zeigen Sie jetzt:

a) Es gilt

$$\mathbb{E}[I_1(\Delta t)] = 0.$$

b) Es gilt

$$\mathbb{E}[I_2(\Delta t)] = \frac{T}{2}.$$

..bitte wenden

**Bemerkung:** In der Vorlesung hatten wir für eine beliebige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Ito-Integral und das Stratonovich-Integral definiert durch

$$\int_0^T f(x_t) dx_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(x_{t_{k-1}}) (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \quad (\text{Ito})$$

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f\left(\frac{x_{t_{k-1}} + x_{t_k}}{2}\right) (x_{t_k} - x_{t_{k-1}}) \quad (\text{Stratonovich})$$

und wir hatten dann die Formel

$$\int_0^T f(x_t) \circ dx_t = \int_0^T f(x_t) dx_t + \frac{1}{2} \int_0^T f'(x_t) dt \quad (1)$$

bewiesen. In der ersten Aufgabe haben Sie jetzt die Formel

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T f(x_t) \circ dx_t \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T f(x_t) dx_t \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[ \int_0^T f'(x_t) dt \right] \quad (2)$$

für den Spezialfall  $f(x) = x$  verifiziert, indem Sie die linke und die rechte Seite explizit berechnet haben.