Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

7. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und der Erwartungswert bezüglich W sei gegeben durch $\mathsf{E}[f] = \int f(\{x_t\})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$.

a) Berechnen Sie folgende Erwartungswerte $(0 < t \leq T)$:

a1) $\mathsf{E}[\, x_t \,]$

a2) $\mathsf{E}[\, x_t^2 \,]$

a3) $\mathsf{E}[\, x_t^n \,]$ mit $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

Erinnern Sie sich dazu an die Formeln von letzten Übungsblatt 5.

b) Berechnen Sie die Varianz $\mathsf{V}[\, x_t \,]$ und die Standardabweichung $\sqrt{\mathsf{V}[\, x_t \,]}$ und skizzieren Sie die Standardabweichung als Funktion von $t \in [0, T]$ etwa für $T = 4$.

Da sämtliche zu berechnenden Grössen von der Form $\int f(x_t)\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sind und nicht etwa $\int f(x_{t_1}, x_{t_2})\, dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$, können Sie hier das Theorem 4.1 aus der Vorlesung mit $m = 1$ anwenden.

2.Aufgabe: Es sei $\{x_t\}_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $dW(\{x_t\}_{0<t\leq T})$ sei das Wiener-Maß und $\mathsf{E}[\,\cdot\,]$ bezeichne den Erwartungswert bezüglich des Wiener-Maßes. Weiter sei $\{S_t\}_{t\geq 0}$ der Preisprozess des Black-Scholes Modells, gegeben durch

$$S_t \;=\; S_0\, e^{\mu t + \sigma x_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathsf{E}[\, S_t \,]$ und die Varianz $\mathsf{V}[\, S_t \,]$. Benutzen Sie dazu wieder das Theorem 4.1 aus der Vorlesung mit $m = 1$.