Hochschule RheinMain WS 2023/24
Prof. Dr. D. Lehmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1.Aufgabe: Beweisen Sie das Lemma 4.1 aus der Vorlesung, das ist die folgende Aussage: Es sei

$$p_t(x,y) \quad := \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$$

Dann gilt:

$$\textstyle\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y)\, p_t(y,z)\, dy \quad = \quad p_{s+t}(x,z) \quad .$$

2.Aufgabe: Es sei x eine auf dem Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahl (auf einem Excelsheet mit englischer Sprach-Einstellung kann man eine solche Zahl etwa mit `x=Rand()` generieren, in VBA muss man die Syntax `x=rnd()` benutzen). Wir ziehen n solche x's, die wir mit $x_1, ..., x_n$ bezeichnen, und definieren die Zufallszahl

$$s_n \quad := \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu := \mathsf{E}[s_n]$ und die Varianz $\sigma^2 := \mathsf{V}[s_n]$.

b) Wir definieren die normierte Zufallszahl

$$z_n \quad := \tfrac{s_n - \mu}{\sigma}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von z_n. Für welche n gilt die Gleichung

$$z_n \quad = \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n \; - \; n/2 \quad ?$$

Als Resultat sollten Sie $n = 12$ finden.

c) Generieren Sie jetzt für $n = 12$ 1000 von den z_n's in Excel und erstellen Sie ein Histogram von diesen z_n's. Was wird in einem Histogramm genau dargestellt? In Excel kann man Histogramme mit dem `Frequency()` oder `Häufigkeit()` Befehl (in einem deutschen Excel) erzeugen.

d) Das Histogramm aus (c) ähnelt einer Gauss'schen Glockenkurve. Tatsächlich kann man es sehr gut durch eine Standard-Normalverteilung (Mittelwert $\mu = 0$, Standardabweichung $\sigma = 1$) approximieren, dazu muss man es etwas skalieren. Finden Sie die geeignete Skalierung und stellen Sie das skalierte Histogramm und die Dichte der Standard-Normalverteilung in einem gemeinsamen Diagramm dar.