

5. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

1. Aufgabe: Gauss'sche Integrale: Die folgenden Formeln werden wir sehr häufig im weiteren Verlauf der Vorlesung benutzen. Beweisen Sie sie:

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right\}^{1/2}$ und Polarkoordinaten.

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 1.$$

Dabei heisst der Integrand

$$p(x; \mu, \sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

die Dichte der Gauss'schen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ .

c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Hinweis: $x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = x \times x e^{-\frac{x^2}{2}}$ und partielle Integration.

d)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 0.$$

e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 3.$$

f)

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} (n-1)!! & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit

$$(n-1)!! := (n-1)(n-3)(n-5)\cdots 3 \cdot 1.$$

g)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} e^{-\alpha \frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{\frac{1}{\alpha} \frac{\lambda^2}{2}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0.$$

Hinweis: quadratische Ergänzung.